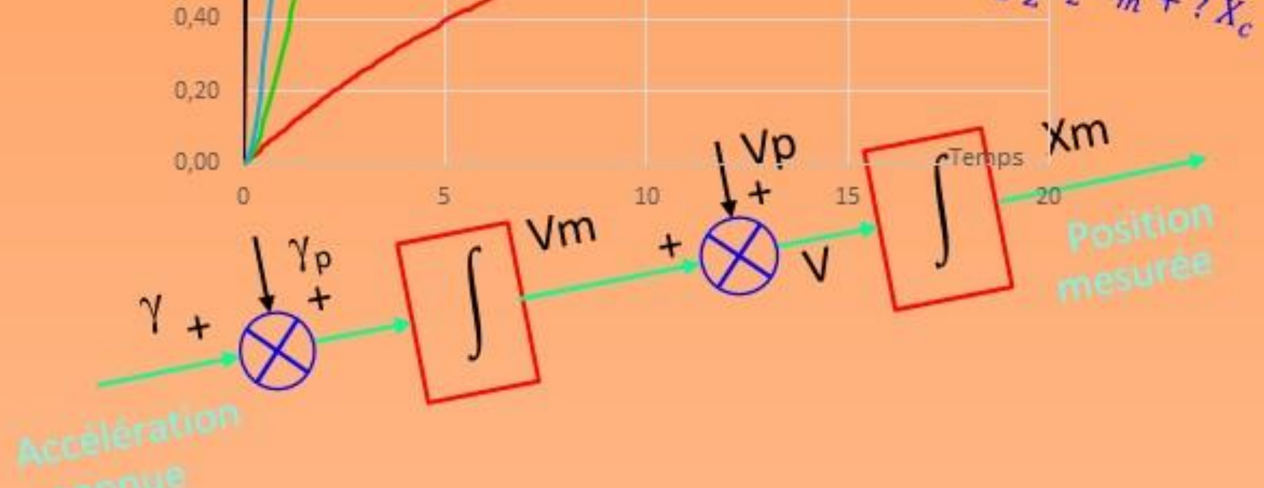
Pierre DER ARSLANIAN

L'outil indispensable
pour vos automatismes

LE FILTRAGE EXPERT

Atténuation très forte
sans retard et sans biais



CONFIDENTIEL INDUSTRIE

AVERTISSEMENT

Le présent ouvrage a été écrit par Pierre DER ARSLANIAN.

Cet ouvrage permet d'avoir une très bonne compréhension du principe du filtrage expert, de sa puissance, de ce qu'il permet de faire, et de voir les différents exemples traités auxquels le filtrage expert a été appliqué.

Cependant cette édition du Filtrage Expert **est volontairement limitée**.

Il n'y a pas les démonstrations ni les formules des filtres complexes.

Le documentation complète, les librairies en C++ et Java, la formation et l'assistance technique, sont disponibles auprès de :

FILTRAGE EXPERT

A l'attention de Pierre Der Arslanian

464 avenue André Dupuy

83160 La Valette du Var

SIRET 841 714 090 00013

Tél : 06 74 45 29 48

Mél : filtrage.expert@gmail.com

Table des matières

1 PRINCIPE DU FILTRAGE EXPERT

1.1 CHAMP D'APPLICATION DU FILTRAGE EXPERT

Le filtrage expert sert à filtrer des informations analogiques (de façon numérique ou analogique), afin d'en réduire le bruit ou des fréquences parasites **dans un rapport de 10, 100 ou 1000, sans apporter le moindre retard**.

Ceci est une technique **fondamentale et quasiment inconnue** de l'automatisme qui transcende les performances des équipements industriels qui intègrent ces algorithmes.

Pour atteindre ces performances, on doit juste disposer d'au moins une information complémentaire, qui peut être soit :

- Une autre information de même nature, par exemple relative au lieu d'être absolue
- Une information sur sa dérivée
- Une information sur sa dérivée seconde
- Un modèle du processus, permettant de disposer d'une information complémentaire : en général on filtre des mesures dans le but de réaliser la commande d'un process connu, on connaît donc le vecteur de commande, qui peut être en accélération, en vitesse, ou autre, et qui permet donc de fournir une information complémentaire
- Ou toute autre information en relation avec la variable à filtrer

1.2 EXEMPLES

Exemple 1 :

On connait la position linéaire d'un mobile mesurée avec un bruit d'un mètre.

On dispose aussi de sa vitesse avec un bruit de 2%.

Grâce au filtrage expert, on va pouvoir connaître la position de ce mobile à **1mm près**, sans aucun retard, c'est-à dire, **avec une précision 1000 fois plus précise** que celle du capteur.

Exemple 2 :

On connaît la position GPS d'un satellite à 10m près.

On connaît sa position relative par rapport à une base en orbite (donc en mouvement) à 10cm près.

On va pouvoir connaître la position GPS du satellite à 10cm près, sans aucun retard, quelle que soit la dérive de la base.

Exemple 3 :

On connaît la position d'un navire à 10m près.

On connaît, grâce à un modèle, les accélérations appliquées au navire par les actionneurs, à 10% près.

On va pouvoir reconstituer :

- Sa position à 10cm près
- Sa vitesse par rapport au fond
- Sa vitesse par rapport à l'eau

- La valeur du courant

Ce ne sont que quelques exemples de ce que peut faire le filtrage expert, mais ils définissent bien la classe des problèmes pourtant très simples qu'il peut résoudre avec des performances exceptionnelles.

1.3 RESOLUTION

Notre cerveau n'est pas très à l'aise pour résoudre ces problèmes, pourquoi ? parce que dans ces énoncés, il y a des informations qui interviennent à différentes fréquences.

Et à chaque instant, nous sommes à toutes les fréquences.

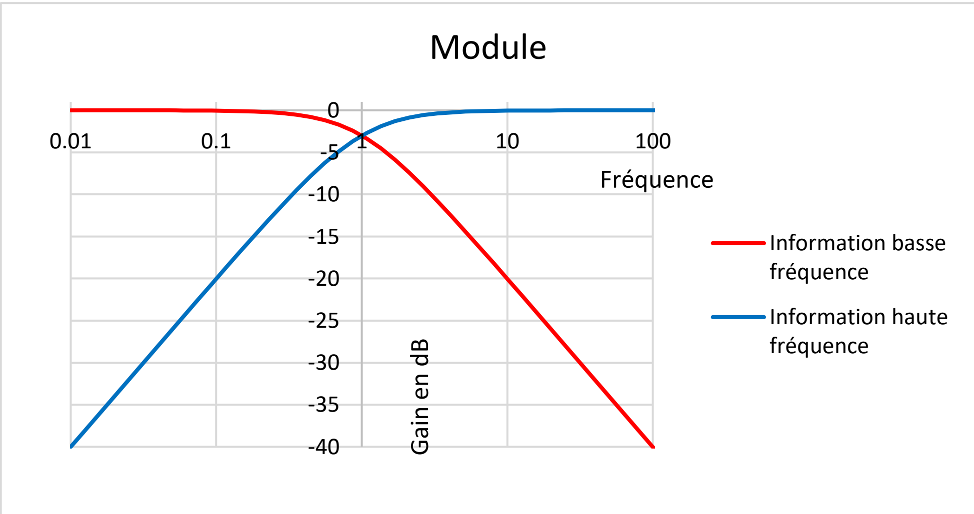
Dans les exemples précédents, on a :

- une information de base (la position), qui est valable à basse fréquence, c'est-à-dire quand on a le temps de filtrer le bruit, et même en régime stationnaire (fréquence = 0), elle est valable à 100%.
- une information complémentaire, qui est valable à haute fréquence, c'est-à-dire qu'elle est valable à 100% lors des mouvements rapides et perd de son sens avec le temps qui passe.

La solution originale pour résoudre ces problèmes est de réaliser **un mélange fréquentiel** de ces deux informations.

Il ne s'agit pas de n'importe quel mélange mais un mélange très précis, réalisé mathématiquement, de telle sorte que :

- la somme des modules des deux informations **soit égale à 1** à toutes les fréquences
- la somme des déphasages des deux informations **soit égale à 0** à toutes les fréquences, pour n'avoir aucun retard au global.



Ceci va pouvoir être réalisé avec des filtres d'ordre, 1, 2, 3 ou 4 pour avoir des atténuations très fortes de 10, 100, 1000, voire plus. Le filtrage expert fournit toute une bibliothèque de filtres prédéfinis.

Dans les différents exemples, le capteur de base est bon à basse fréquence (en bleu), c'est la référence, en régime stationnaire, on doit le prendre à 100%.

Mais dans les fréquences plus élevées, il apparaît du bruit ou des fréquences parasites.

On va alors utiliser l'information complémentaire (en rouge) pour compléter l'information à plus haute fréquence.

Dans l'exemple 1 :

La position est l'information de base, complètement valide à basse fréquence.

Et la vitesse va permettre de reconstituer l'information manquante à haute fréquence.

Dans la bibliothèque des filtres experts, il existe des filtres complémentés en vitesse et sans biais.

Dans l'exemple 2 :

L'information de base est la position GPS, qui est la référence à basse fréquence, mais trop bruitée à haute fréquence.

L'information complémentaire est la position relative, qui fournit une information précise à haute fréquence, mais qui est inutilisable à basse fréquence à cause de la dérive de la base (qui est à basse fréquence).

Il suffit de complémenter les deux informations avec un filtrage expert pour avoir une position GPS valide à toutes les fréquences.

Dans l'exemple 3 :

La position est l'information de base, complètement valide à basse fréquence.

On va utiliser l'accélération pour reconstituer l'information manquante à haute fréquence.

Dans la bibliothèque des filtres experts, il existe des filtres complémentés en accélération et sans biais.

Les différentes vitesses (par rapport à l'eau, au sol, le courant) sont obtenues toujours par des filtres experts qui utilisent la dérivée de la position à basse fréquence et l'intégrale de l'accélération à haute fréquence.

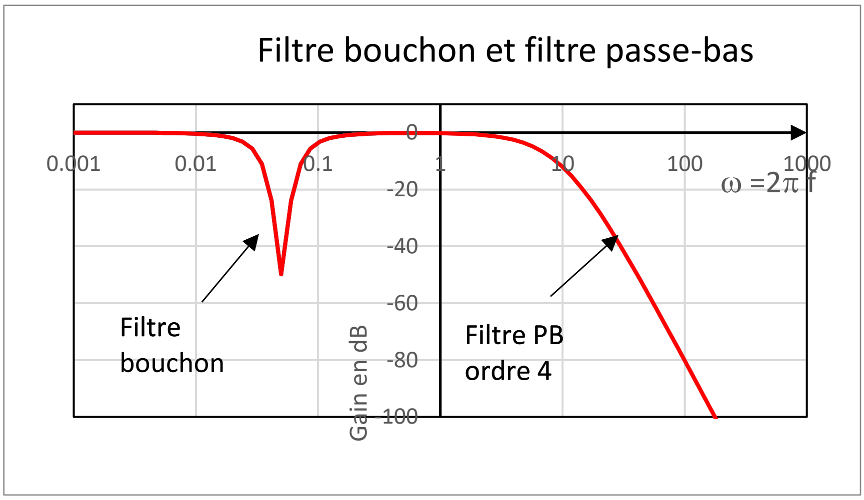
Ces exemples sont bien détaillés par la suite.

Toutes ces informations peuvent être bien sûr matricielles.

1.4 AFFINAGE FREQUENTIEL

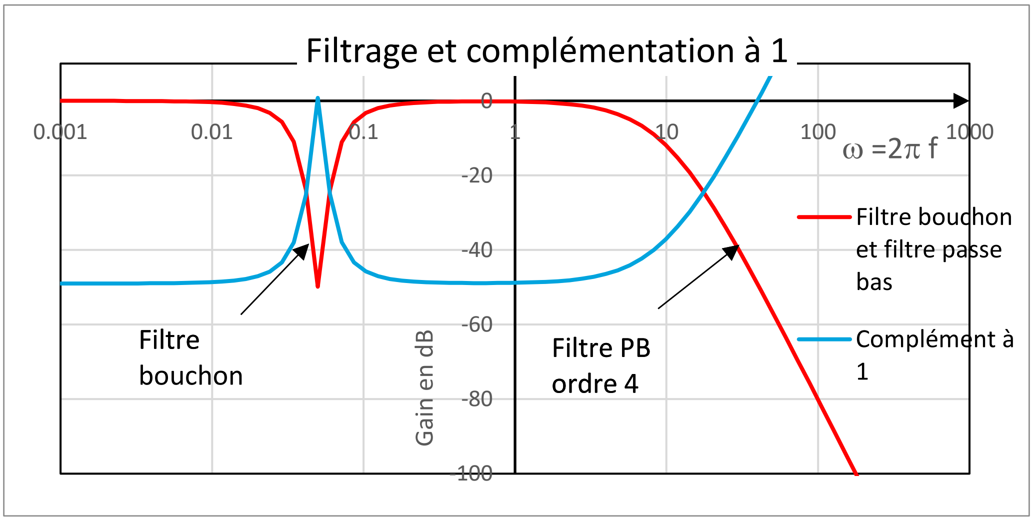
La technique du filtrage expert consiste tout d'abord, à partir d'un capteur, à déterminer la plage fréquentielle utile, sans bruit, sans résonnance et sans défaut de ce capteur.

Sur cet exemple, on souhaite enlever les informations haute fréquence du capteur (par un filtre passe-bas), parce qu'elles sont par exemple trop bruitées, et d'autre part, il y a une résonnance que l'on voudrait filtrer par un filtre bouchon.



Le problème est que si l'on applique des filtres classiques : filtres passe-bas, filtres bouchon, ceux-ci vont apporter du retard, ce qui souvent rédhibitoire.

Dans le cas du filtrage expert, on va reconstituer l'information que l'on a perdue, à partir d'une autre information ou à partir d'un modèle, de telle façon que **la somme des fonctions de transfert fasse bien 1 à toutes les fréquences**, et que **la somme des déphasages fasse bien 0 à toutes les fréquences** d'une façon mathématiquement parfaite, ce qui fait que cela n'introduira aucun retard, ni aucun biais et que l'atténuation du bruit pourra être aussi forte qu'on le souhaite (coefficients sur les mesures aussi petits que l'on souhaite).



Dans cet exemple, on a complémenté l'information de base en bleue, par un gabarit de l'information en rouge, de telle sorte que la somme des fonctions de transfert fasse bien 1 à toutes les fréquences.

2 LE FILTRAGE EXPERT VS KALMAN

Le filtrage de Kalman a permis un grand progrès dans le filtrage, par le fait qu'il n'introduisait pas de retard, ceci grâce à la notion de modèle.
Nous allons voir que le filtrage expert peut être considéré comme une extension de Kalman, plus simple, plus rapide, 100 fois plus performante et sans biais.

Ce qui fait la complexité du filtrage de Kalman, c'est qu'il permet d'avoir des coefficients d'atténuation du bruit qui s'adaptent automatiquement en fonction du bruit réel des capteurs. Si ce besoin existe, il faut utiliser un filtre de Kalman.

Cependant, cette caractéristique est rarement utilisée dans les automatismes industriels, car les calculs sont très compliqués, la stabilité n'est pas garantie, les performances peuvent être fluctuantes, et les comportements non reproductibles.
Donc, si on supprime la notation matricielle, et l'adaptation automatique des coefficients, un filtre de Kalman s'écrit :

$$\boxed{\tilde{X} = \propto\ X_m\ +\ (1-\propto)\ X_p}$$

Où :

- $\tilde{X}$ est la valeur filtrée
- X_m est la valeur mesurée
- $\propto$ est le coefficient d'atténuation de la mesure
- X_p est la valeur prédite

On calcule la prédiction X_p à partir de la dernière valeur filtrée : $X_p = \tilde{X} +\ V\ T$

Où T est la période d'échantillonnage.

V peut être obtenue à partir d'un capteur, de l'intégrale de l'accélération (si on connait la commande en force appliquée au système) ou d'un modèle général comme : $V\ =\ AX\ +\ B\ U$

où U est la commande appliquée au processus.

On peut constater qu'un filtre de Kalman se comporte comme un filtre du 1er ordre sur la mesure (sans l'inconvénient du retard).

En effet l'équation de filtrage d'un filtre du 1er ordre est : $\tilde{X} = \propto\ X_m\ +\ (1-\propto)\ X_{m-1}$

2.1 AVANTAGES DU FILTRAGE DE KALMAN

- Il permet de filtrer avec un 1er ordre sur la mesure sans retard
- Il permet de réduire le bruit en général dans un rapport de 10 à 20 max ($\propto =$ $0{,}1$ à $0{,}05$), car au-delà les erreurs de modèle induisent un biais trop important.
- Il permet d'avoir des coefficients d'atténuation du bruit qui s'adaptent automatiquement en fonction du bruit réel des capteurs.

2.2 INCONVENIENTS DU FILTRAGE DE KALMAN

2.2.1 Atténuation du bruit limitée

- Suite à cela, le coefficient « $\propto$ » ne peut pas être très petit (> 0,05), **et donc le filtre de Kalman ne permet pas des réductions de bruit dans des rapports importants** ($\propto = 0{,}001$ par exemple) car le modèle n'est pas suffisamment recalé sur la mesure.
- En cas de saut sur la mesure, le ralliement va se faire extrêmement lentement.

2.2.2 Introduction d'un biais par le filtre de Kalman

Voir le calcul du biais introduit par le filtre de Kalman en annexe 2.

Quand la valeur prédite est calculée à partir de l'intégrale de la vitesse, ou de l'intégrale double de l'accélération**, la valeur filtrée est biaisée**, alors que le capteur, lui, n'a pas de biais (ou il est inconnu). Il est vrai que l'on peut identifier ce biais par un intégrateur ou par une variable supplémentaire, mais l'identification du biais est lente pour ne pas rendre le processus instable. Et il n'est pas logique d'avoir une mesure bonne à basse fréquence et de récupérer une valeur filtrée qui soit biaisée (c'est aussi de la basse fréquence), ce n'est pas très professionnel.

2.2.3 Pas de filtrage adapté à la mesure

Ce filtre ne peut pas fonctionner si le gabarit du filtre à mettre sur la mesure, pour éliminer son bruit, est complexe : par exemple filtre du 3ème ordre + filtre bouchon.

2.2.4 Ralliements à la mesure lents

En cas de saut de la mesure de base, ou si le modèle n'est pas très juste, le ralliement à la mesure de base est très lent.

2.2.5 Calculs compliqués

Les calculs sont très compliqués, et donc la mise en œuvre et la mise au point sont longs.

3 PUISSANCE DU FILTRAGE EXPERT

3.1 PAS DE RETARD

Comme dans le filtrage de Kalman, l'information est complémentée par un modèle ou par une autre information, qui permet de reconstituer l'information manquante à moyenne et haute fréquence, et de n'avoir ainsi aucun retard (à l'inverse des filtres classiques du 1er, 2ème, 3ème ordre, etc.).

3.2 FILTRAGE ADAPTE A LA MESURE

Dans le filtrage expert, on peut exploiter au mieux la plage fréquentielle utile de chaque capteur ou information, c'est-à-dire faire du sur-mesure avec des équations standard.

3.3 ELIMINATION DU BIAIS

Certains filtrages comme celui de Kalman fonctionnent en prenant par exemple 10% de la mesure et 90% de la prédiction élaborée à partir d'un modèle.

Mais quand le modèle provient d'une intégrale de la vitesse ou d'une intégrale double de l'accélération, ou qu'il y a des perturbations, ce type de filtre crée un biais, puisque la prédiction n'est plus bonne. D'autre part, il met du temps à se recaler sur la mesure si elle fait un saut brusque.

Le filtrage expert, lui, est calé à 100% sur la mesure aux basses fréquences, ce qui fait qu'il n'a aucun biais et que le ralliement de la valeur filtrée, en cas de saut de la mesure, est extrêmement rapide

3.4 CALCULS SIMPLES

Les équations de filtrage sont très simples et tiennent souvent sur une seule ligne.

3.5 COMPLEMENT

Le filtrage expert ne nécessite pas forcément un modèle mais peut se contenter d'une information complémentaire.

3.6 REFERENCES

Les filtres experts ont été utilisés depuis une trentaine d'années dans des systèmes embarqués temps réel, industriels et militaires.

Les performances sont époustouflantes, et dépassent ce qu'un cerveau humain peut imaginer, car un cerveau ne sait pas travailler fréquentiellement. Réduire le bruit d'une mesure dans un rapport de 1000 sans aucun retard, ni biais, transforme la performance du produit final.

Je me souviens d'un commandant de navire de 100m de long, ne comprenant pas comment le système d'asservissement au point fixe, ou suivi de rail, pouvait élaborer une position aussi précise, avec des informations si bruitées qui parvenaient au système, tout ceci induisant une sollicitation minimale des actionneurs.

La mise en œuvre du filtrage expert est très simple, les calculs sont très rapides.

3.7 ATTENUATION TRES FORTE

Nous verrons qu'avec le filtrage expert, on a des filtres d'ordre 2, 3, 4 qui permettent d'avoir des coefficients d'atténuation de plus en plus faibles : au lieu d'être en $\propto = \omega T$, d'être en $\omega^2 T^2$, $\omega^3 T^3$ou en $\omega^4 . T^4$, c'est-à-dire qu'au lieu d'être de 0,1, ils vont pouvoir être de 0,01, 0,001 ou 0,0001

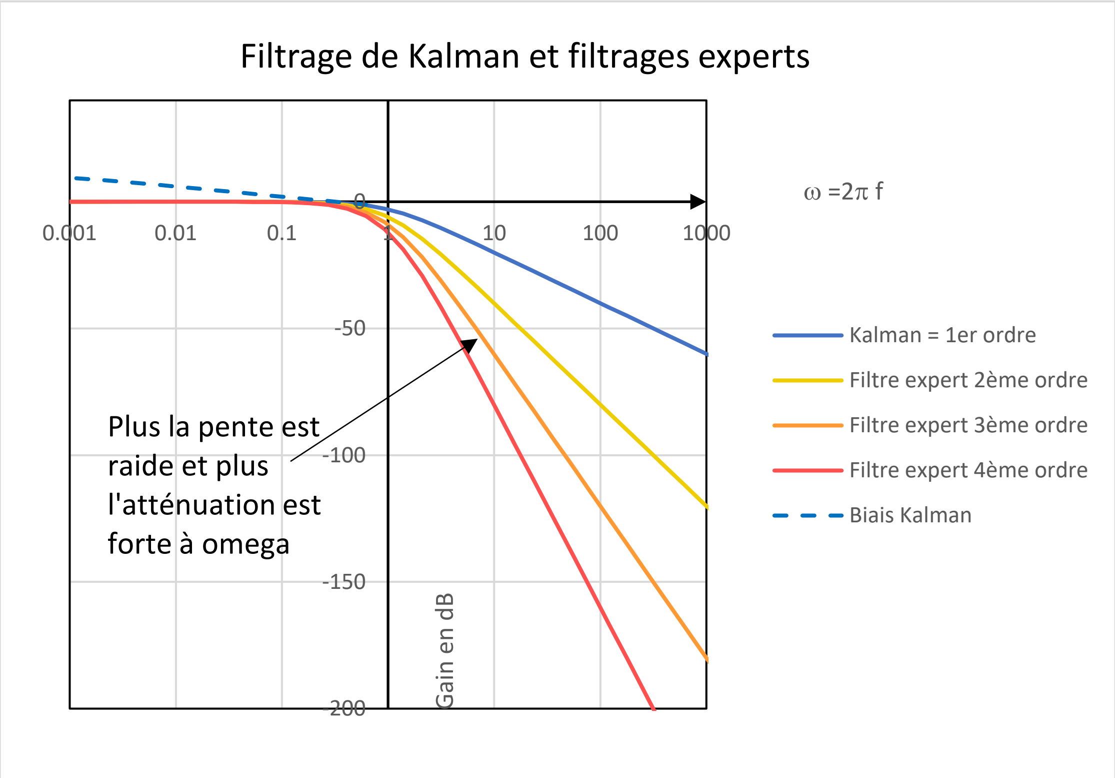
On voit sur ce diagramme de Bode, les gains de filtrage en fonction des fréquences.

- Sur l'axe des X : ce sont les fréquences en échelle logarithmique.
- Sur l'axe des Y, ce sont les atténuations du filtrage en dB : $\propto = 20\ log_{10}(\Delta\tilde{X}/\Delta X_m)$ Plus l'atténuation est forte et plus le bruit résiduel sur la valeur filtrée est faible.

L'avantage de ce type de graphique, est que des portions de filtres sont représentées par des droites.

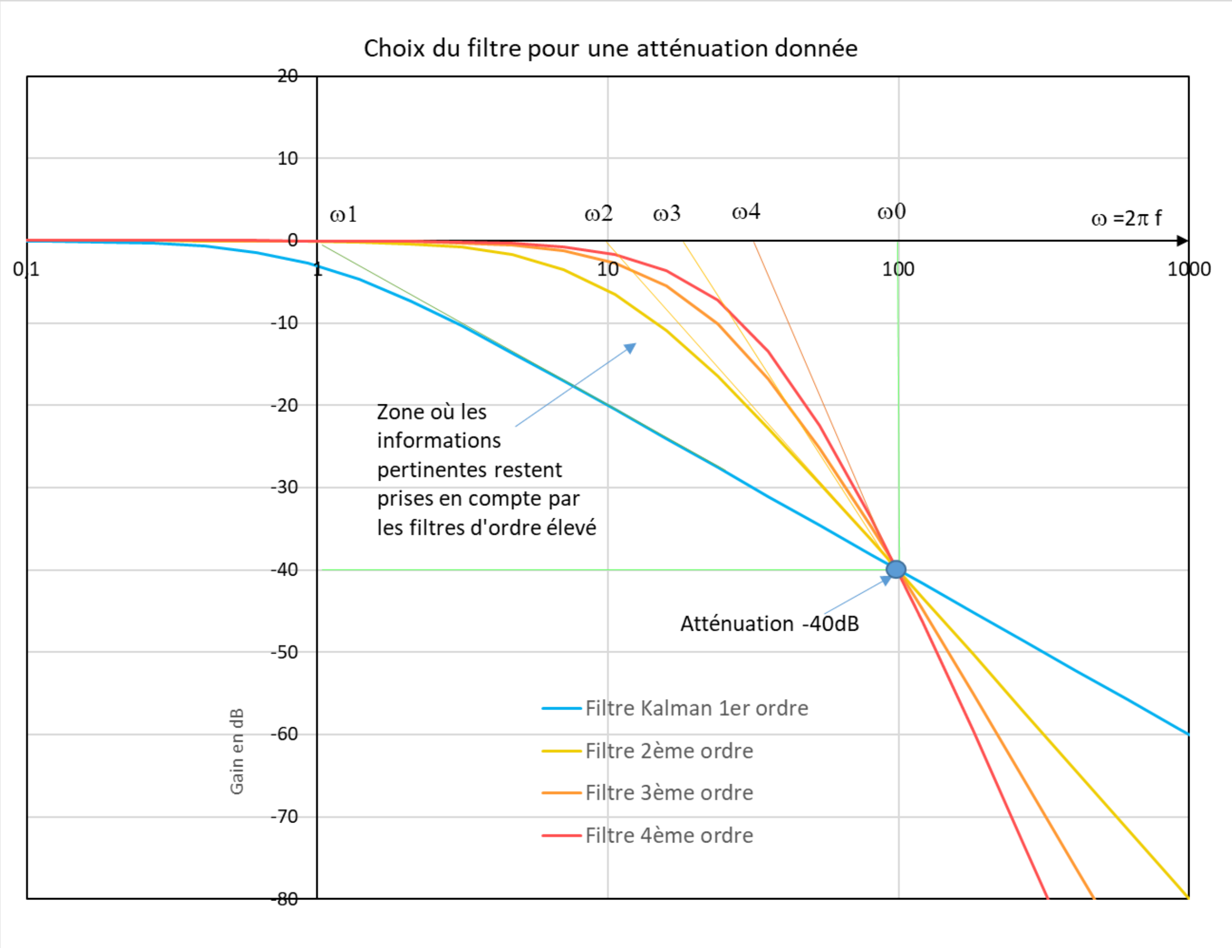
Le filtrage de Kalman, qui est équivalent à un 1er ordre, est représenté par la courbe bleue en trait plein, et par l'introduction de son biais sur la courbe bleue pointillée aux basses fréquences.

Les autres courbes représentent des filtrages experts du 2ème ordre, 3ème ordre, 4ème ordre.



Le filtrage expert permet de disposer de filtres plus puissants du 2ème, 3ème, 4ème ordre, qui permettent d'avoir des atténuations non plus de 20dB par décade mais de 40dB, 60dB, 80dB.

Sur cet autre point de vue, toujours sur un diagramme de Bode, on voit les influences des filtrages pour une atténuation ∝ donnée.



Si on souhaite par exemple, une atténuation de 100 sur le bruit de la mesure $(\Delta \tilde{X}/\Delta X_m) = 0{,}01$

L'atténuation est en dB : $\propto = 20\ log_{10}(\Delta \tilde{X}/\Delta X_m) = 20\ log_{10}(0{,}01) = 20 \times (-2) = -40dB$

Pour cette valeur de -40dB et pour une fréquence donnée (100Hz par exemple), on voit les différentes courbes de filtrage en fonction de leur ordre.

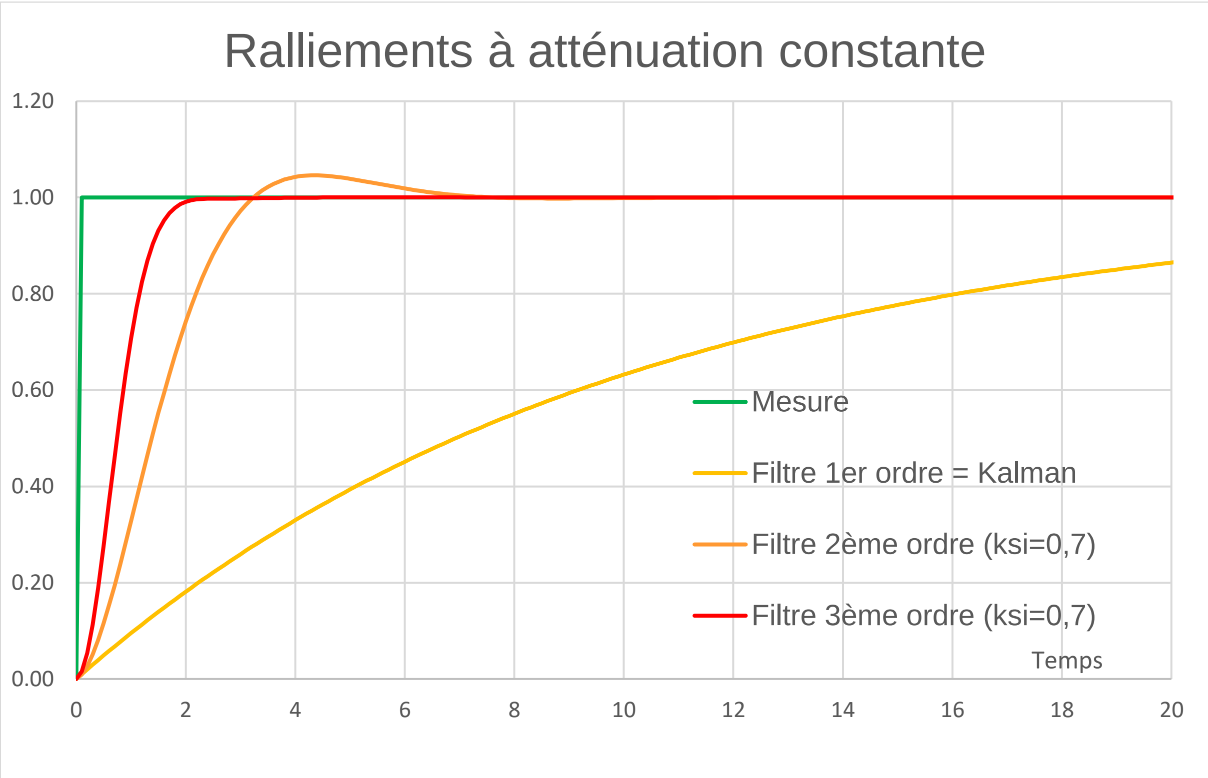
On voit que les filtres d'ordre >1 continuent à prendre en compte à quasiment 100% les informations des mesures entre ω_1 et ω_2, ce que ne fait pas le filtre de Kalman du premier ordre.

Et plus l'ordre est élevé, plus les informations à ω_2 et ω_3 sont prises en compte par le filtrage, avant la fréquence de coupure ω_0.

3.8 RALLIEMENT RAPIDE

Il peut arriver que l'information de base, subisse un saut, suite par exemple, au retour à la normale après une panne.

Plus l'ordre est élevé, et plus le ralliement en cas de saut de la mesure de base est rapide (à ∝ constant).



Le filtrage expert par construction élimine le biais aux basses fréquences. A basse fréquence, la valeur filtrée est parfaitement calée sur la mesure. Pas besoin d'intégrateurs rajoutés qui rendent le filtrage instable.

Le filtrage expert permet de dessiner le gabarit de filtrage le mieux adapté pour récupérer toute l'information utile de la mesure avec par exemple des filtres bouchons sans retard, etc.

Note : Les techniques du filtrage expert peuvent être réalisés indifféremment par du filtrage numérique ou analogique (attention dans ce dernier cas à la précision des composants dans le cas de filtres élaborés).

4 TROUVER UNE INFORMATION COMPLEMENTAIRE

Que ce soit avec le filtrage de Kalman ou le filtrage expert, nous avons besoin d'une information complémentaire ou d'un modèle.

4.1 MODELE GENERAL

De façon générale, le modèle d'un processus s'écrit :

$$[X'] = [A][X] + [B][U]$$

$[X]$ étant le vecteur d'état, par exemple : $[X, Y, Z]$

$[X']$ étant sa dérivée

$[U]$ étant le vecteur de commande

$[A]$ et $[B]$ des coefficients

On obtient ainsi la dérivée en fonction du vecteur d'état et du vecteur de commande.

On intègre cette dérivée : $[X] = [X]_{-1} + [X'] \Delta T$ et on obtient le vecteur d'état au cycle suivant.

Bien que toutes les grandeurs de cet ouvrage puissent représenter des matrices, nous n'alourdirons pas les notations avec la représentation matricielle.

4.2 NOTATIONS

Nous utiliserons les grandeurs X, V et γ pour exprimer la grandeur principale, sa dérivée, et sa dérivée seconde. Donc :

V est la dérivée de *X*

γ est la dérivée de V

On pense bien sûr à la position, la vitesse et l'accélération d'un mobile.

Mais ces grandeurs pourraient être n'importe quel autre type de grandeur, associée à sa dérivée, et sa dérivée seconde, par exemple :

- Angle, vitesse angulaire, accélération angulaire
- Vitesse, accélération, sa dérivée
- Température, flux thermique, énergie thermique
- Variables d'un processus chimique
- Etc.

X_m désignera la valeur mesurée

X_c la valeur complémentaire

$\tilde{X}$ la valeur filtrée

X_{m-1}, $\tilde{X}_{-1}$, X_{c-1} les valeurs ci-dessus de la période d'échantillonnage précédente.

X_{m-2}, $\tilde{X}_{-2}$, X_{c-2} les valeurs ci-dessus de 2 périodes d'échantillonnage précédentes.

X_{m-3}, $\tilde{X}_{-3}$, X_{c-3} les valeurs ci-dessus de 3 périodes d'échantillonnage précédentes.

T la période d'échantillonnage (en seconde)

f la fréquence de coupure des filtres.

ω la pulsation de coupure des filtres ($=2\pi f$).

4.3 LE MODELE EN PRATIQUE

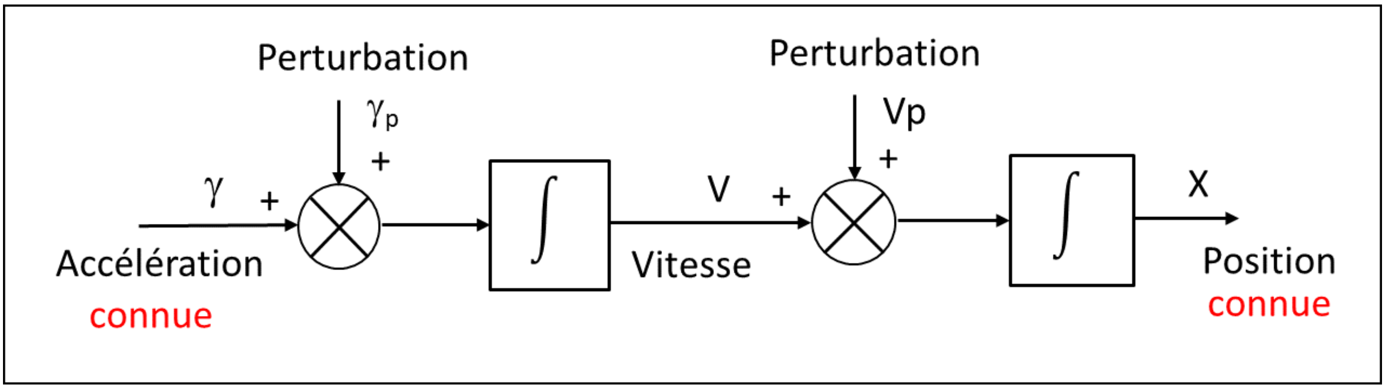
Fréquemment, lorsque l'on a besoin de filtrer une mesure, c'est pour réaliser la commande d'un processus que l'on connaît, dont on a un modèle, même grossier. Souvent la commande se fait au niveau de la dérivée, ou de l'intégrale, ou encore à des niveaux inférieurs.

Quand on commande un moteur dans un sens, on s'attend à ce que le mobile commandé subisse une accélération dans le même sens que la commande.

Quand on rentre chez soi et qu'il y a une panne d'électricité, on sait quand même se repérer car on a en mémoire le modèle de notre domicile et de l'endroit où se trouvent les interrupteurs.

De la même façon, nous allons pouvoir utiliser des informations complémentaires de différentes natures pour améliorer notre signal.

Voici un exemple du modèle d'un processus commandé en accélération (ou en force) :



Cette accélération s'intègre en vitesse, puis en position. Entre temps, il peut y avoir des perturbations.

Si nous devons filtrer la mesure du capteur de position, nous allons pouvoir utiliser cette accélération comme information complémentaire, même si nous ne connaissons pas les perturbations en accélération et en vitesse. Nous allons même pouvoir identifier ces dernières.

Nous supposons néanmoins ces dernières relativement constantes.

5 REALISER UN FILTRAGE EXPERT

5.1 COMMENT COMPLEMENTER L'INFORMATION

Pour reconstruire le signal perdu par le filtrage et retrouver la phase, nous allons nous servir d'informations complémentaires.

Si Xm est notre mesure de base, elle peut être complémentée par :

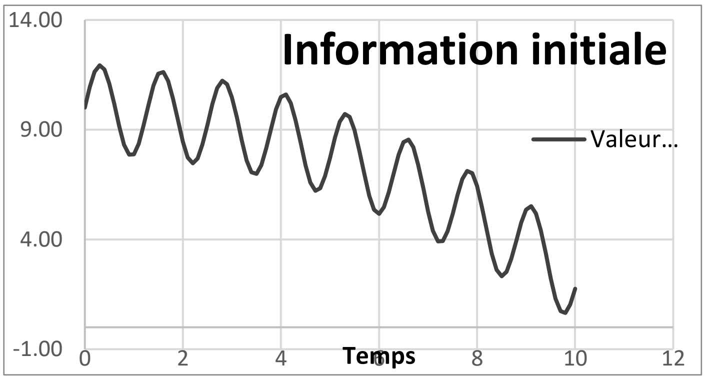
- Une information complémentaire de même grandeur *Xc*
- Une information complémentaire correspondant à sa dérivée *Vc*
- Une information complémentaire correspondant à son accélération γc
- Une information complémentaire correspondant à son intégrale $\int c$
- Etc.

Nous allons dans un premier temps analyser le cas le plus facile où nous avons deux informations de même nature.

5.2 EXEMPLE

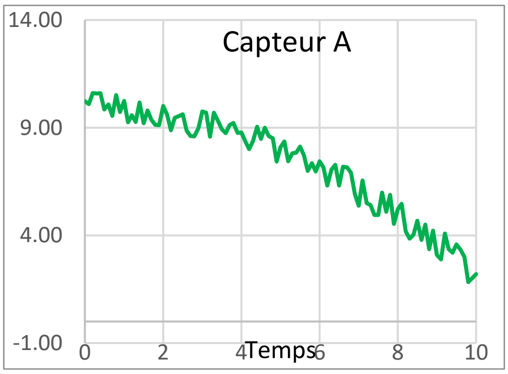
Nous allons voir, dans cet exemple très simple, l'intérêt du filtrage expert dans la complémentation avec une grandeur de même type, puis nous verrons comment complémenter avec les dérivées, accélérations, etc.

Imaginons une information qui évolue ainsi dans le temps (axe horizontal) :

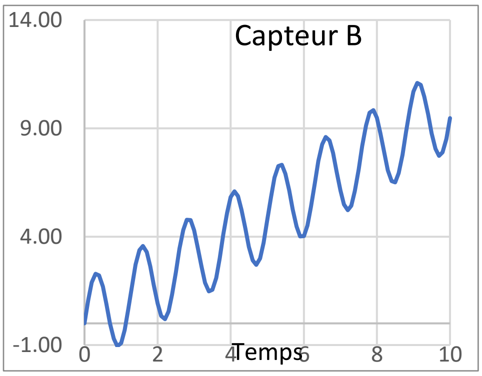


Imaginons que nous ne disposions pas de mesure directe pour cette information mais que nous avons les deux capteurs suivants (ou plus généralement 2 informations).

Celui-ci valable à basse fréquence

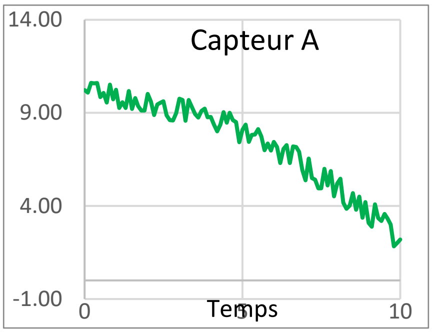


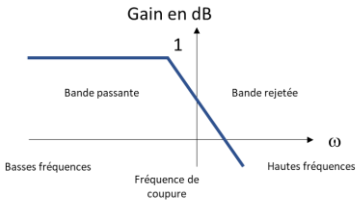
Celui-ci bonne à hte fréq mais avec dérive

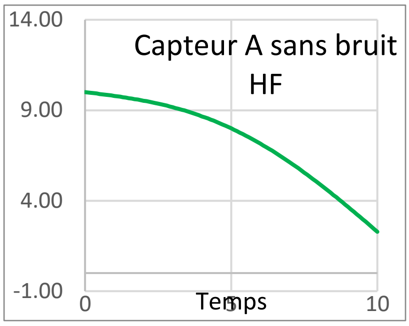


La reconstruction du signal expert va se faire en passant la mesure A dans un filtre passe-bas :

Information initiale => Gabarit du filtre passe-bas Fb => Information filtrée

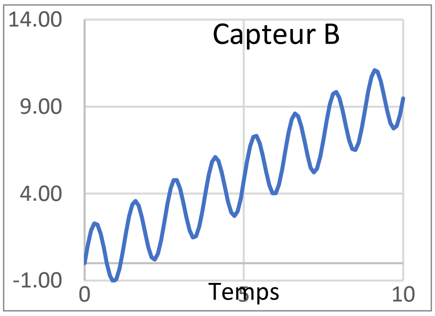


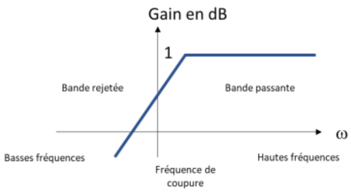


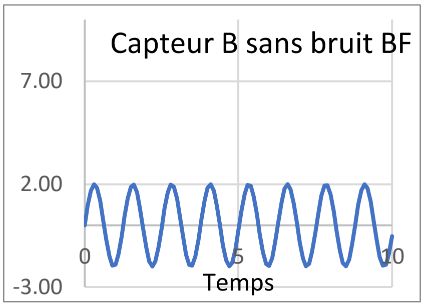


Et en passant la mesure B dans un filtre passe-haut :

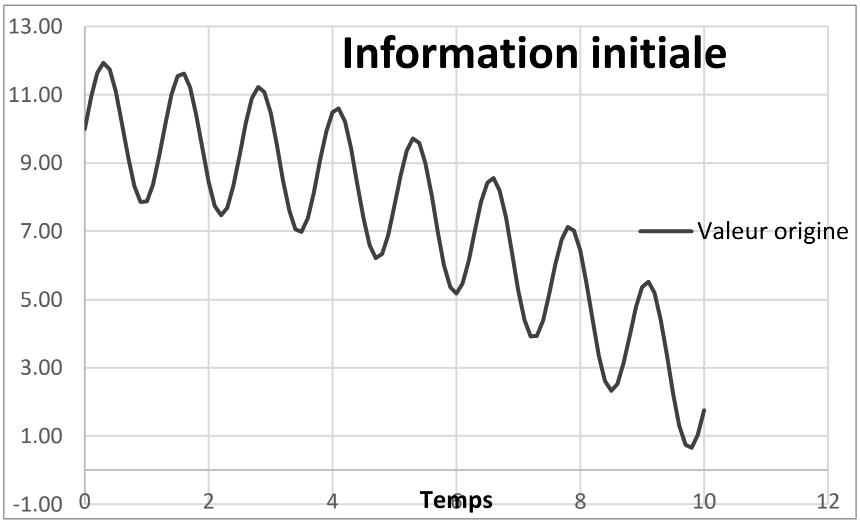
Information initiale => Gabarit du filtre passe-haut Fh => Information filtrée







En faisant la somme des deux courbes filtrées, on retrouve bien notre signal initial.



Valeur filtrée $\tilde{X}$ = Filtre passe-bas (X_m) + Filtre passe-haut (X_c).

Cet exemple est destiné à nous sensibiliser au filtrage expert et à en comprendre le fonctionnement. Mais dans cet exemple, on a triché, car pour faire les filtrages décrits, de façon parfaite, sans retard, **on a supposé que l'on connaissait le futur**, ce qui est rarement le cas dans les applications temps réel.

Nous allons voir maintenant comment, dans le filtrage expert, nous allons obtenir ce même résultat, sans connaître le futur.

5.3 EXEMPLE PRECEDENT EN PRATIQUE

Lorsque l'on réalise un filtrage, on ne connaît pas en principe le futur.

Aussi, lorsqu'on applique un filtre passe-bas classique, celui-ci va apporter du retard, il va créer un déphasage aux moyennes fréquences (aux hautes fréquences aussi mais le gain est faible).

Toute l'astuce du filtrage expert, consiste à complémenter l'information, de façon à ce que l'information complémentaire redonne l'amplitude et surtout l'avance de phase qui a été perdue, et de faire en sorte qu'**à toutes les fréquences :**

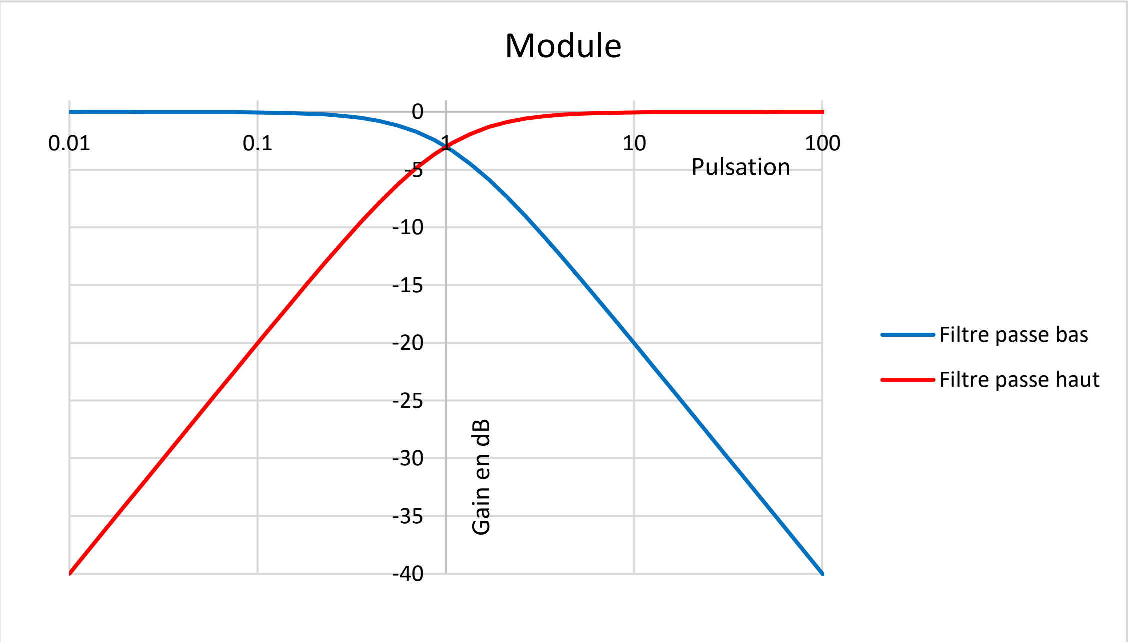
LA SOMME DES FONCTIONS DE TRANSFERT SOIT EGALE A 1.

Pour cela il faut que :

- **La somme des modules soit égale à 1 à toutes les fréquences**

A la courbe bleue d'un filtre passe bas, qui possède une atténuation aux hautes fréquences, on va rajouter la courbe rouge d'un filtre passe haut afin que la somme des amplitudes fasse bien 1 à toutes les fréquences.

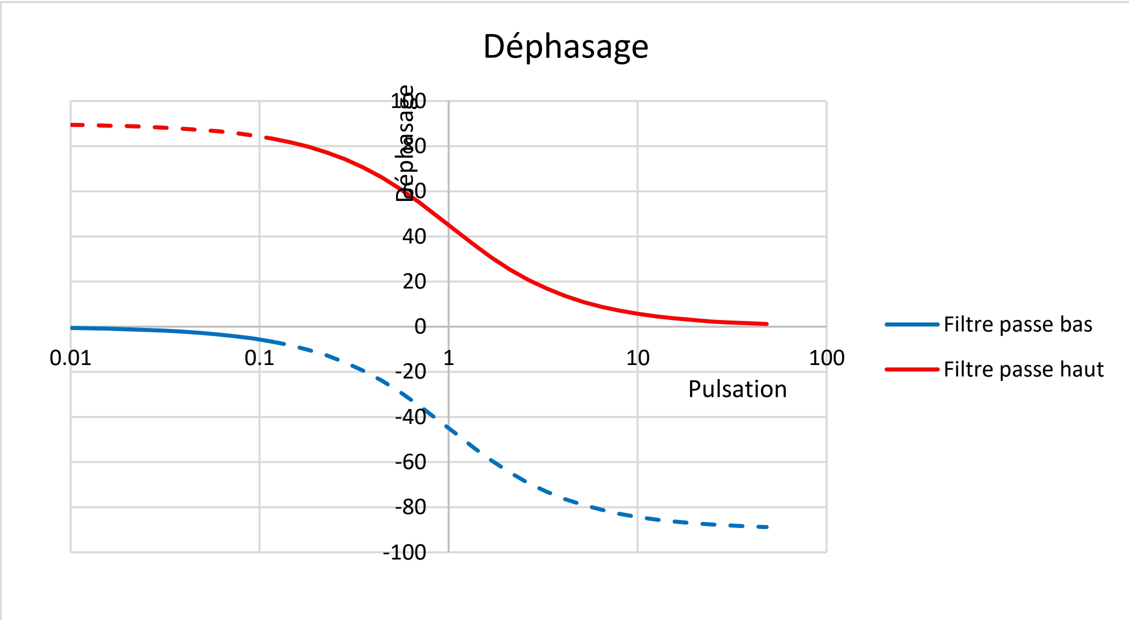
La somme des modules est égale à 1 à toutes les fréquences.



- **Et que la somme des déphasages soit nulle à toutes les fréquences**

A la courbe bleue d'un filtre passe bas, qui possède un déphasage aux hautes fréquences, on va rajouter la courbe rouge d'un filtre passe haut afin que la somme des déphasages soit nulle à toutes les fréquences.

La somme des déphasages est nulle à toutes les fréquences.



Courbe filtre passe-bas en bleue :

- A très basse fréquence, on voit que le déphasage est nul, et comme le gain est de 1, cela rend le déphasage global nul.
- A la fréquence de coupure (100 dans l'exemple), le déphasage passe à -45° (retard). On va voir comment cela est compensé par le filtre passe-haut.
- Pour les fréquences plus élevées, le déphasage augmente à -90°, mais comme le gain est très faible (diagramme précédent), l'effet de ce déphasage est négligeable.

Courbe filtre passe-haut en rouge :

- A très basse fréquence, on voit que le déphasage est important (90°), mais comme le gain est très faible (diagramme précédent), l'effet de ce déphasage est négligeable.
- A la fréquence de coupure (100 dans l'exemple), le déphasage vaut + 45° (avance de phase), ce qui va compenser exactement le déphasage du filtre passe-bas. *Le déphasage global est donc nul.*
- Pour les fréquences plus élevées, le déphasage est nul, et comme le gain est très fort (diagramme précédent), cela rend le déphasage global nul.

Donc, à toutes les fréquences, le déphasage total est nul, le filtrage expert n'apporte aucun retard.

Mais nous allons revoir cela de façon mathématiquement exacte.

5.4 LA COMPLEMENTATION

Au-delà de cette analyse qualitative destiné à nous sensibiliser à la méthode, nous allons réaliser la complémentation avec une précision mathématique parfaite.

Si on filtre X_m avec un filtre passe-bas du 1er ordre : $\tilde{X} = X_m \frac{1}{1+\tau p}$

Par quoi faut-il complémenter $X_m \frac{1}{1+\tau p}$ pour que l'équation soit vraie à toutes les fréquences ?

$$\tilde{X} = \frac{1}{1+\tau p} X_m + ?\ X_c$$

Il faut que la somme des coefficients qui se trouvent devant X_m et X_c fasse 1 à toutes les fréquences, donc quel que soit p. On identifie facilement le complément :

$$\frac{1}{1+\tau p} + ? = 1 \quad => \quad \frac{1}{1+\tau p} + \frac{\tau p}{1+\tau p} = 1$$

D'où :

$$\boxed{\tilde{X} = \frac{1}{1+\tau p} X_m + \frac{\tau p}{1+\tau p} X_c}$$

En fait, il suffit tout simplement de complémenter le filtre passe-bas par un filtre passe-haut équivalent.

Attention, on ne fait pas la somme des signaux, on fait la somme des fonctions de transfert, et pour que cela fonctionne parfaitement, il faut que la somme fasse bien 1 à toutes les fréquences.

5.5 PASSAGE EN CALCUL NUMERIQUE

Si vous n'êtes pas familier avec le calcul numérique, voir en Annexe les explications.

Il suffit de savoir qu'une grandeur X multipliée par z^{-1}, revient à prendre cette grandeur au cycle T précédent X_{-1} (c'est très simple mais déroutant au début) :

$$X.z^{-1} = X_{-1}$$

L'équation d'un filtre passe-bas du 1er ordre est :

$$\tilde{X} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}} X_m$$

L'équation d'un filtre passe-haut du 1er ordre est :

$$\tilde{X} = \frac{b(1-z^{-1})}{1-b\,z^{-1}} X_m$$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$ f étant la fréquence de coupure du filtre.

Et l'équivalence suivante pour la fréquence de coupure : $\tau = 1/\omega$

En calcul numérique, cela donne :

$$\tilde{X} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}} X_m + \frac{b(1-z^{-1})}{1-b\,z^{-1}} X_c$$

$$\tilde{X}(1-b\,z^{-1}) = (1-b)\,X_m + b(1-z^{-1})\,X_c$$

Et comme $X.z^{-1} = X_{-1}$, la formule de récurrence du filtre est :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$$

Le coefficient devant la mesure est $\propto = 1 - b$

Comme on cherche souvent à obtenir une forte atténuation du bruit, ce coefficient est souvent petit :

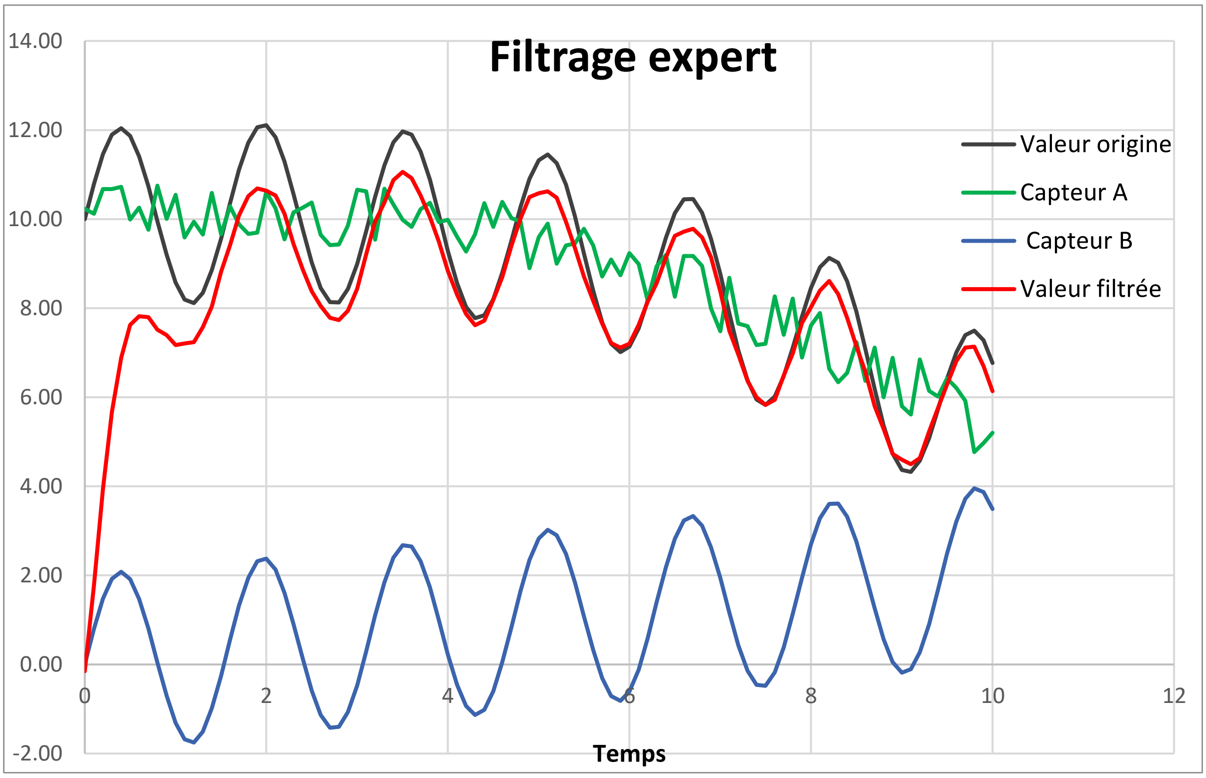
si $\propto \leq 0{,}1$, alors $\propto = 1 - b = 1 - e^{-\omega T} \cong 1 - (1-\omega T) = \omega T$

La constante de temps, soit le ralliement d'un échelon à 63%, vaut $\tau = 1/2\pi f = 1/\omega$

Le filtrage expert est en fait très simple, mais très puissant, comme on va le voir ci-après.

5.6 RESULTAT

Si on réalise le filtrage décrit précédemment avec les mesures X_m et X_c, nous obtenons le résultat qui est la mesure filtrée en rouge :



On voit que la valeur filtrée (en rouge) est très proche de l'information initiale (en noir), et que le filtre expert a bien reconstitué l'information initiale à partir de la courbe verte aux basses fréquences et de la bleue aux hautes fréquences.

C'est le principe de base (sur cet exemple très simple pour l'instant) du filtrage expert.

Conclusions : on peut constater sur ce diagramme les points suivants :

- **Pas de retard** :
  - On voit que la valeur filtrée en rouge est parfaitement synchrone de la valeur d'origine en noir.
- **Atténuation du bruit** :
  - On voit que le bruit résiduel induit par l'information (en vert) a disparu quasi totalement.
- **Elimination du biais :**
  - La valeur filtrée (en rouge) a retrouvé la tendance BF vers le bas en suivant le capteur A (en vert) vers le bas.
  - De plus le départ initial à zéro n'a volontairement pas été initialisé à la première valeur reçue, ainsi on peut voir le ralliement de la valeur filtrée (en rouge) sur la noire, qui est très rapide. On est loin des intégrateurs très lents que l'on doit rajouter sur les filtres ou les commandes classiques.
- **Filtrage adapté à la mesure :**
  - On a pris le meilleur de chaque information
- **Calculs simples : les calculs sont on ne peut plus simples**

5.7 EXEMPLES

Cet exemple pourrait correspondre aux applications suivantes :

- Pour réaliser une commande automatique d'un mobile, on veut connaitre parfaitement sa position, pour cela, on dispose d'un capteur relatif (valide à haute et moyenne fréquence), mais on voudrait se recaler sur la position à basse fréquence, mais qui, elle, est trop bruitée à moyenne et haute fréquence :

  On prend l'équation précédente avec :

  - X_m : Position utilisée à basse fréquence
  - X_c : Position relative utilisée à moyenne et haute fréquence

- Pour réaliser une commande de stabilisation du roulis d'un navire, on dispose de 2 modèles : un modèle de roulis, décrivant les mouvements du navire à la fréquence de la houle mais à moyenne nulle, et un modèle de giration, décrivant la gîte en particulier lors d'un changement de barre.

  On prend l'équation précédente avec les vitesses des deux modèles :

  - X_m : Vitesse en roulis donnée par le 1^er^ modèle
  - X_c : Vitesse de la gîte donnée par le 2^ème^ modèle

5.8 EXEMPLE DU SATELLITE

Pour piloter un satellite, on a besoin de connaître très précisément sa position absolue.

Pour cela, on dispose de deux informations :

- La position absolue du satellite, mais très bruitée, donc valide à basse fréquence, c'est notre mesure de base : X_m
- La position relative du satellite par rapport à un autre satellite en orbite. Cette position relative est très précise, mais possède une dérive importante et permanente liée au déplacement du satellite en orbite, c'est notre mesure complémentaire : X_c

La fréquence d'échantillonnage nécessaire est de 1Hz (T=1s) et l'atténuation nécessaire sur l'information de position absolue est de 1000 à cette fréquence.

Donc on prend l'équation précédente avec :

X_m : Position absolue à basse fréquence

X_c : Position relative à haute fréquence

La formule est :

$$\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})$$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$ f étant la fréquence de coupure du filtre.

$\tilde{X}_{-1}$ est la valeur filtrée $\tilde{X}$ du cycle précédent.

X_{c-1} est la valeur X_c du cycle précédent.

On a : $T = 1s$

On a besoin d'un coefficient devant la mesure X_m de 0,001 (atténuation de 1000 demandée) :

$\propto = 1 - b = 0{,}001 \Rightarrow b = 0{,}999$

La formule de récurrence est : $\boxed{\tilde{X} = 0{,}999\,\tilde{X}_{-1} + 0{,}001\,X_m + 0{,}999\,(X_c - X_{c-1})}$

Là, les calculs sont simples, mais dans la plupart des filtres qui suivent, il faut calculer tous les coefficients très précisément.

La contrepartie par rapport à l'exigence de l'atténuation du bruit dans un rapport de 1000 à la période $T = 1s$ est que suite à un échelon sur X_m, le ralliement de la valeur filtrée va se faire avec une constante de temps :

$$\tau = 1/2\pi f = 1/\omega$$

Comme $\propto \leq 0{,}1$, alors $\propto = 1 - b = 1 - e^{-\omega T} \cong 1 - (1 - \omega T) = \omega T \Rightarrow \omega = \propto / T$

Donc : $\tau = 1/\omega \cong T/\propto = 1/000{,}1 = 1000s = 16mn$

Et un ralliement à 95% en $3\tau = 3000\mathrm{s} = 50\mathrm{mn}$

Ces temps peuvent paraître trop longs. Cela permet d'introduire les filtres d'ordre plus élevés qui suivent, dont les coefficients ne sont plus en ωT (comme Kalman) mais en $\omega^2 T^2, \omega^3 T^3, \omega^4 T^4, etc.$ ce qui permettra, d'avoir des constantes de temps beaucoup plus courtes et des ralliements à la mesure beaucoup plus rapides.

Cet échelon est normalement improbable, vu qu'il s'agit de la mesure de base, mais il est important, pour la robustesse du filtrage, d'être capable de le prendre en compte.

6 FILTRAGE EXPERT AVEC COMPLEMENT EN X

Sur le principe de base du filtrage expert, nous allons voir les différents types de filtrage complémentés par une information de même nature Xc.

Ensuite, dans les chapitres suivants, nous verrons des mesures complémentées en Vet en γ.

6.1 FILTRAGE EXPERT du 1ème ordre

Rappel de la formule de récurrence :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$ f étant la fréquence de coupure du filtre.

Le coefficient devant la mesure $a = 1 - b$ est voisin de ωT si le choix de $a \ll 0{,}1$

6.2 FILTRAGE EXPERT du 2ème ordre

L'équation d'un filtre du 2ème ordre (cf annexe) est :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{1 - a + b}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}$$

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$

et $b = e^{-2\xi\omega T}$

$\xi = 0{,}7$ par défaut.

Nous prenons ce filtre du 2ème ordre sur X_m et nous le complémentons avec X_c :

$$\tilde{X} = \frac{1 - a + b}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}\,X_m + ?\,X_c$$

Comment complémenter X_c afin que cela fasse 1 à toutes les fréquences ? Avec $A, B\ et\ C$

$$\tilde{X} = \frac{1 - a + b}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}\,X_m + \frac{A + Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}\,X_c$$

Le principe de base du filtrage expert est que la somme des coefficients devant X_m et X_c doit faire 1 à toutes les fréquences, quel que soit z.

$$1 - az^{-1} + bz^{-2} = (1 - a + b) + (A + Bz^{-1} + Cz^{-2})$$

En identifiant les termes en z^0, z^{-1} et z^{-2}, on détermine ainsi $A, B\ et\ C$:

$A = a - b$ $B = -a$ $C = b$

$$\tilde{X}\,(1 - az^{-1} + bz^{-2}) = (1 - a + b)\,X_m + ((a-b) - az^{-1} + bz^{-2})\,X_c$$

$$\boxed{\tilde{X} = a\,\tilde{X}_{-1} - b\,\tilde{X}_{-2} + (1 - a + b)\,X_m + (a-b)\,X_c - a\,X_{c-1} + b\,X_{c-2}}$$

Si ωT est $\ll 1$ *et si on prend* $\xi = 0{,}7$, alors le coefficient qui pondère la mesure brute X_m vaut :

$$1 - a + b \cong \omega^2 T^2 = 4\pi^2 f^2 T^2$$

Ce coefficient en $\omega^2 T^2$ devient très petit, ce qui est intéressant puisque, à fréquence de coupure ω égale, le bruit de la mesure sera bien atténué.

Attention dans les calculs, ne jamais faire ces approximations, mais faire les calculs exacts.

6.3 FILTRAGE EXPERT du 3ème ordre

L'équation d'un filtre du 3ème ordre (cf annexe) est :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{(1 - a + b)\,(1 - c)}{(1 - az^{-1} + bz^{-2})\,(1 - cz^{-1})}$$

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T} \cos(\omega T \sqrt{1 - \xi^2})$ $\qquad b = e^{-2\xi\omega T}$ $\qquad c = e^{-\omega T}$

Nous prenons ce filtre du 3ème ordre sur X_m et nous le complémentons avec X_c.

$$\tilde{X} = \frac{(1 - a + b)\,(1 - c)}{(1 - az^{-1} + bz^{-2})\,(1 - cz^{-1})} X_m + \frac{A + Bz^{-1} + Cz^{-2} + Dz^{-3}}{(1 - az^{-1} + bz^{-2})\,(1 - cz^{-1})} X_c$$

Nous faisons en sorte que la somme des coefficients devant X_m et X_c fasse 1.

$$(1 - az^{-1} + bz^{-2})\,(1 - cz^{-1}) = (1 - a + b)\,(1 - c) + A + Bz^{-1} + Cz^{-2} + Dz^{-3}$$

Ensuite on identifie les termes en z^0, z^{-1}, z^{-2}, z^{-3} ; il vient :

$$A = 1 - (1 - a + b)(1 - c)$$

$$B = -a - c$$

$$C = ac + b$$

$$D = -bc$$

L'équation de récurrence est :

$$\boxed{\tilde{X} = (a + c)\ \tilde{X}_{-1} - (ac + b)\,\tilde{X}_{-2} + bc\,\tilde{X}_{-3} + (1 - A)\ X_m + AX_c + BX_{c-1} + CX_{c-2} + DX_{c-3}}$$

Le coefficient appliqué à la mesure : $\alpha = (1 - a + b)\,(1 - c)$ peut être approximé :

si $\alpha \ll 0{,}1$, on a $\alpha = \omega^3 T^3 = 8\,\pi^3 f^3 T^3$, ce qui permet d'avoir une idée de f.

Ensuite, une fois f connu, on recalcule précisément tous les coefficients.

7 CHOIX DE CONCEPTION DU FILTRAGE

7.1 CHOIX DE L'ORDRE DU FILTRAGE EN X

L'atténuation est le coefficient $\propto$ figurant devant la mesure X_m et servant à atténuer son bruit.

Plus l'atténuation est forte et plus le coefficient de filtrage $\propto$ appliqué à la mesure X_m est petit.

Voici un tableau qui résume l'atténuation en fonction de l'ordre des filtrages experts en X.

	1er ordre	2ème ordre ($\xi = 0{,}7$)	3ème ordre ($\xi = 0{,}7$)
Atténuation $\propto$ (coefficient devant la mesure)	$\propto = \omega T$	$\propto = \omega^2 T^2$	$\propto = \omega^3 T^3$

Lorsque l'on réalise un filtrage, c'est pour avoir une certaine atténuation sur le bruit de la mesure de base X_m. Le choix de l'ordre du filtrage va se faire souvent en fonction de l'atténuation désirée.

Pour un ordre de filtrage donnée, il y a une pulsation de coupure ω associée à $\propto$:

- Avec un 1er ordre : $\omega = \propto / T$
- Avec un 2ème ordre : $\omega = \sqrt{\propto / T^2}$
- Avec un 3ème ordre : $\omega = \sqrt[3]{\propto / T^3}$

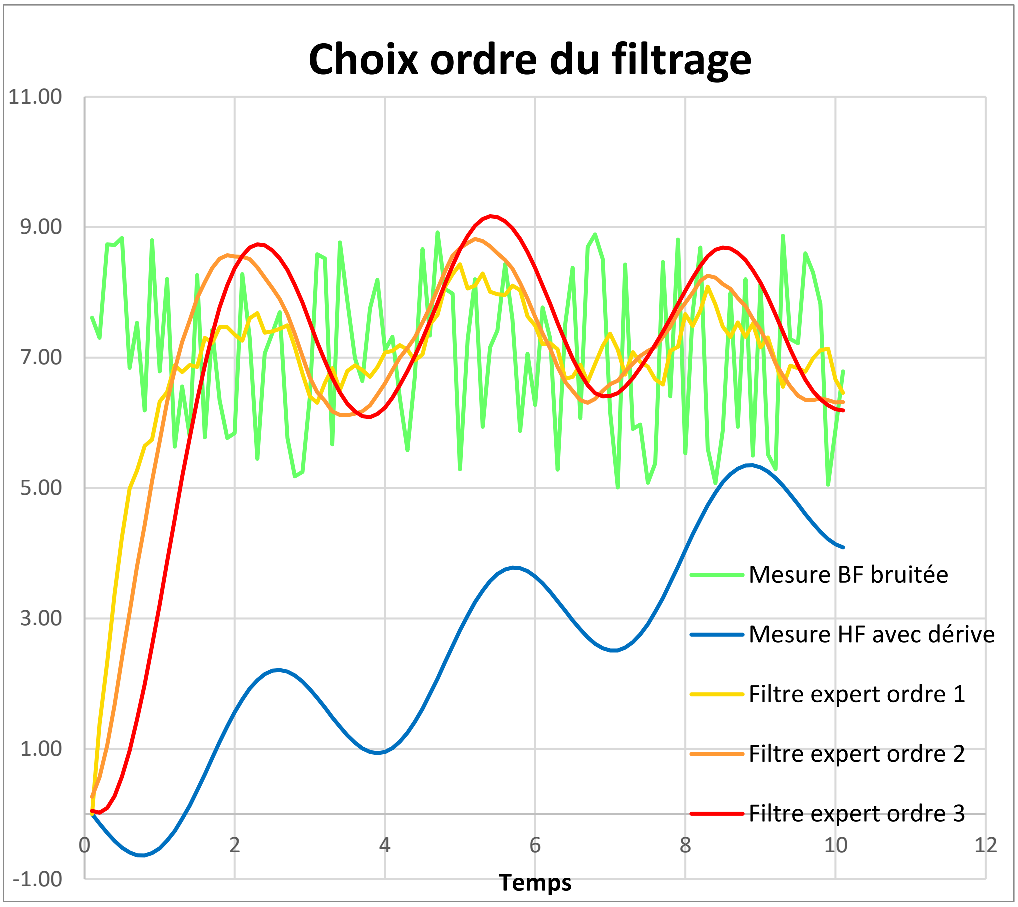
Si par exemple $\propto = 0{,}01$ et $T = 0{,}1s$ cela correspond à :

- Avec un 1er ordre : $\omega = \propto / T = 0{,}1 \text{ rd/s}$
- Avec un 2ème ordre : $\omega = \sqrt{\propto / T^2} = 1 \text{ rd/s}$
- Avec un 3ème ordre : $\omega = \sqrt[3]{\propto / T^3} = 3{,}165 \text{ rd/s}$

Cette pulsation augmente avec l'ordre du filtre, ce qui donne en général des filtres de meilleure qualité puisque les signaux de pulsation inférieure à ω ne sont que peu modifiés, donc plus ω est grand et plus la bande passante du filtre est élevée (toujours à $\propto$ constant).

On voit sur ce diagramme qu'il s'agit de réaliser un filtrage expert à partir de 2 informations :

- La courbe verte X_m bonne à basse fréquence, mais bruitée
- La courbe bleue X_c, bonne à moyenne et haute fréquence, mais qui a une dérive lente.



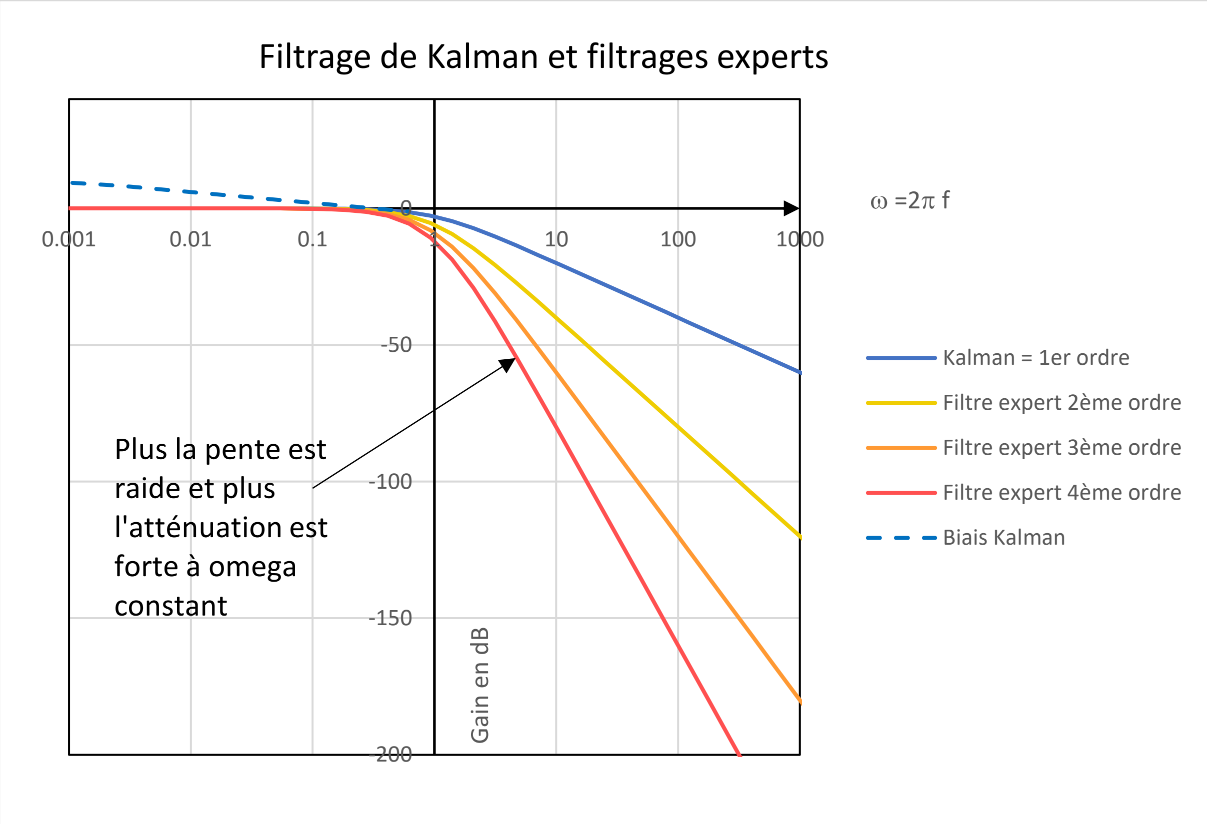
On voit les résultats en fonction des ordres de filtrage, à ω constant :

- La courbe jaune est le résultat d'un filtre expert d'ordre 1, qui laisse passer du bruit
- La courbe orange est le résultat d'un filtre expert d'ordre 2, moins bruitée
- La courbe rouge est le résultat d'un filtre expert d'ordre 3, quasi parfait.

7.2 CHOIX DE L'ORDRE A OMEGA CONSTANT

Le filtrage expert permet de disposer de filtres du 2ème, 3ème, 4ème ordre, qui permettent d'avoir des atténuations non plus de 20dB par décade mais de 40dB, 60dB, 80dB.

On peut ainsi pour un ω donné avoir une atténuation beaucoup plus forte des bruites de plus hautes fréquences



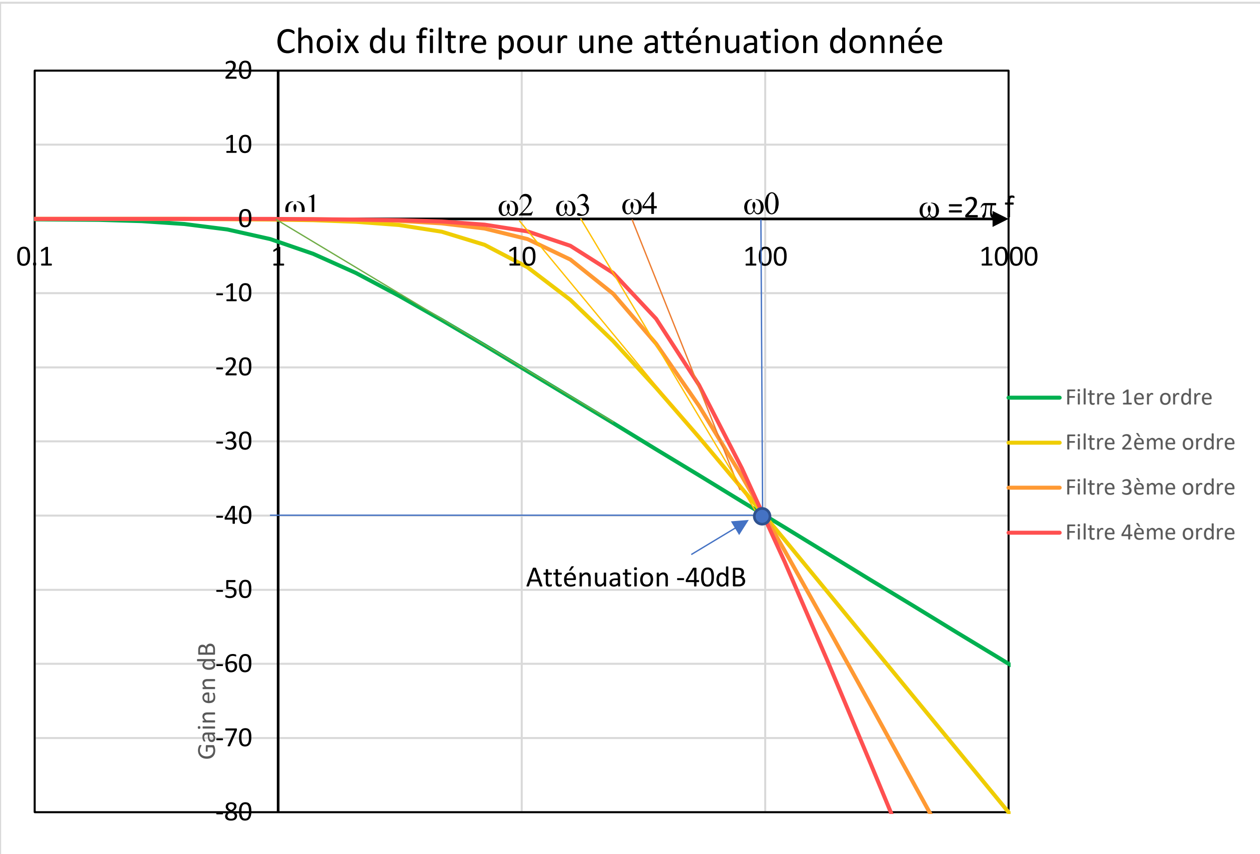
7.3 CHOIX DE L'ORDRE A ATTENUATION CONSTANTE

Par exemple si l'on souhaite une atténuation de 100, $\propto = 0{,}01$ (cela équivaut à 40dB), à la pulsation ω = 100rd/s,

- Avec un filtre du 1er ordre, la pulsation de base $\omega 1$ est 100 fois plus petite (40dB -> 2 décades). Les signaux entre $\omega 1$ et $\omega 0$, sont atténués.
- Avec un filtre du 2ème ordre, une pulsation de base $\omega 2$, 10 fois plus petite (20dB -> 1 décade), Seulement les signaux entre $\omega 2$ et $\omega 0$, commencent à être atténués
- Avec un filtre du 3ème ordre, une pulsation de base $\omega 3$, 5 fois plus petite, à partir de $\omega 1$, les signaux ne sont atténués qu'entre $\omega 0$ et $\omega 3$

On voit sur le graphique ci-dessous, que plus l'ordre du filtre est élevé et plus la fréquence de coupure du filtre sera élevée.

On voit que si l'on veut conserver l'information du signal entre $\omega 1$ et $\omega 3$ il faut utiliser un filtre au moins d'ordre 3.



7.4 RALLIEMENTS

La vitesse de ralliement sur la mesure de base est importante, elle joue directement sur la robustesse du filtrage. Normalement, il s'agit de la mesure de base, sur laquelle on se fie à 100% aux basses fréquences (le ralliement se fait justement aux basses fréquences).

Mais il y a 2 cas principaux où la vitesse de ralliement est importante :

Sauts :

Même si à l'initialisation du filtre, on initialise la valeur filtrée à la première valeur reçue, on n'est pas à l'abri d'un saut de cette mesure de base (comme un GPS qui ne reçoit plus les satellites, et qui les reçoit de nouveau), on peut en cas de trop grand écart entre la valeur filtrée et la valeur de la mesure de base, faire comme pour l'initialisation, mais avec une rampe pour ne pas trop solliciter les organes qui utilisent la valeur filtrée.

Erreurs de modèle et perturbations :

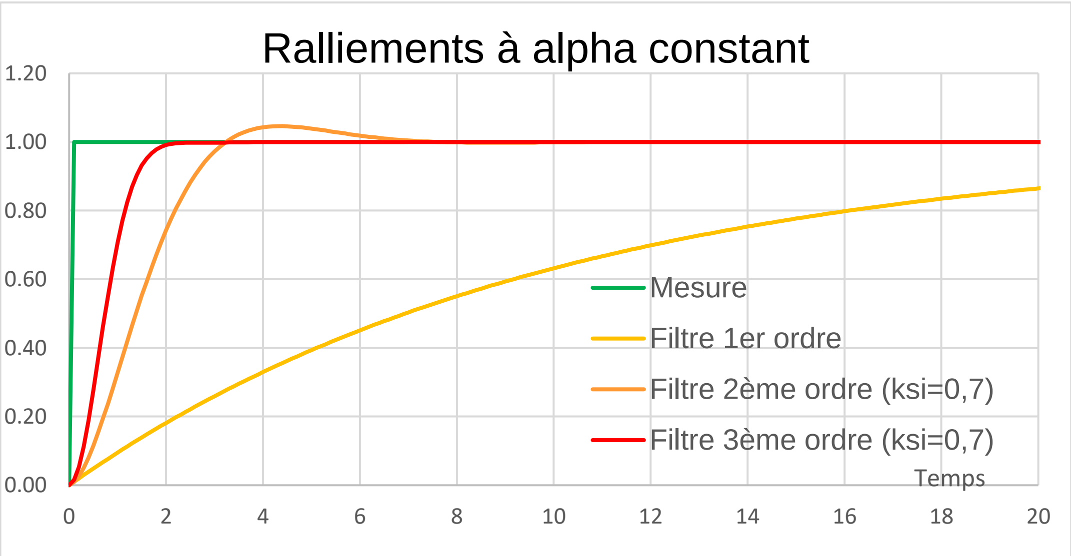
A chaque fois qu'il y a des erreurs de modèles ou des perturbations non connues, c'est la mesure de base qui doit faire foi, et qui doit rattraper le filtrage. Donc, plus le ralliement sur cette mesure de base est rapide, et plus la robustesse du filtrage par rapport aux erreurs de modèle sera grande.

7.5 RALLIEMENTS A ATTENUATION CONSTANTE

Si on reprend les valeurs de ω à atténuation constante avec $\propto = 0{,}01$ et $T = 0{,}1s$:

- Avec un 1er ordre : $\omega = \propto/T = 0{,}1 \text{ rd/s}$
- Avec un 2ème ordre : $\omega = \sqrt{\propto/T^2} = 1 \text{ rd/s}$
- Avec un 3ème ordre : $\omega = \sqrt[3]{\propto/T^3} = 3{,}165 \text{ rd/s}$

On obtient les courbes suivantes :



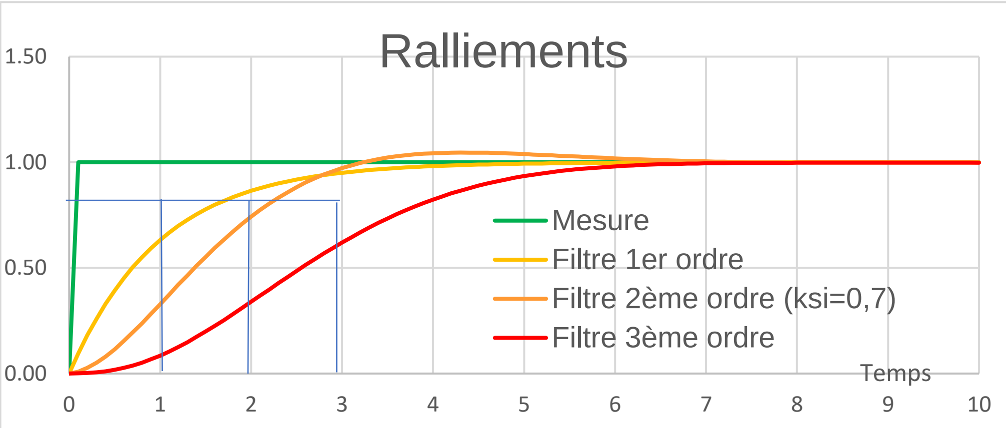
On voit que le filtrage du 1er ordre (qui correspond à Kalman) est à éviter, car suite à un saut de la mesure de base, ou à trop d'erreurs de modèle, le ralliement se fait trop lentement.

7.6 RALLIEMENTS A OMEGA CONSTANT

On peut voir sur le diagramme ci-dessous que suite à un échelon, les courbes de ralliement prennent un peu de retard au fur et à mesure que l'ordre du filtre augmente, **mais à oméga constant**.

1^{er} ordre : $\tau = 1/\omega$ $2^{ème}$ ordre : $\tau \approx 1{,}8/\omega$ $3^{ème}$ ordre : $\tau \approx 3{,}2/\omega$

Mais ceci est largement compensé par le fait que la pulsation de coupure est beaucoup plus rapide.



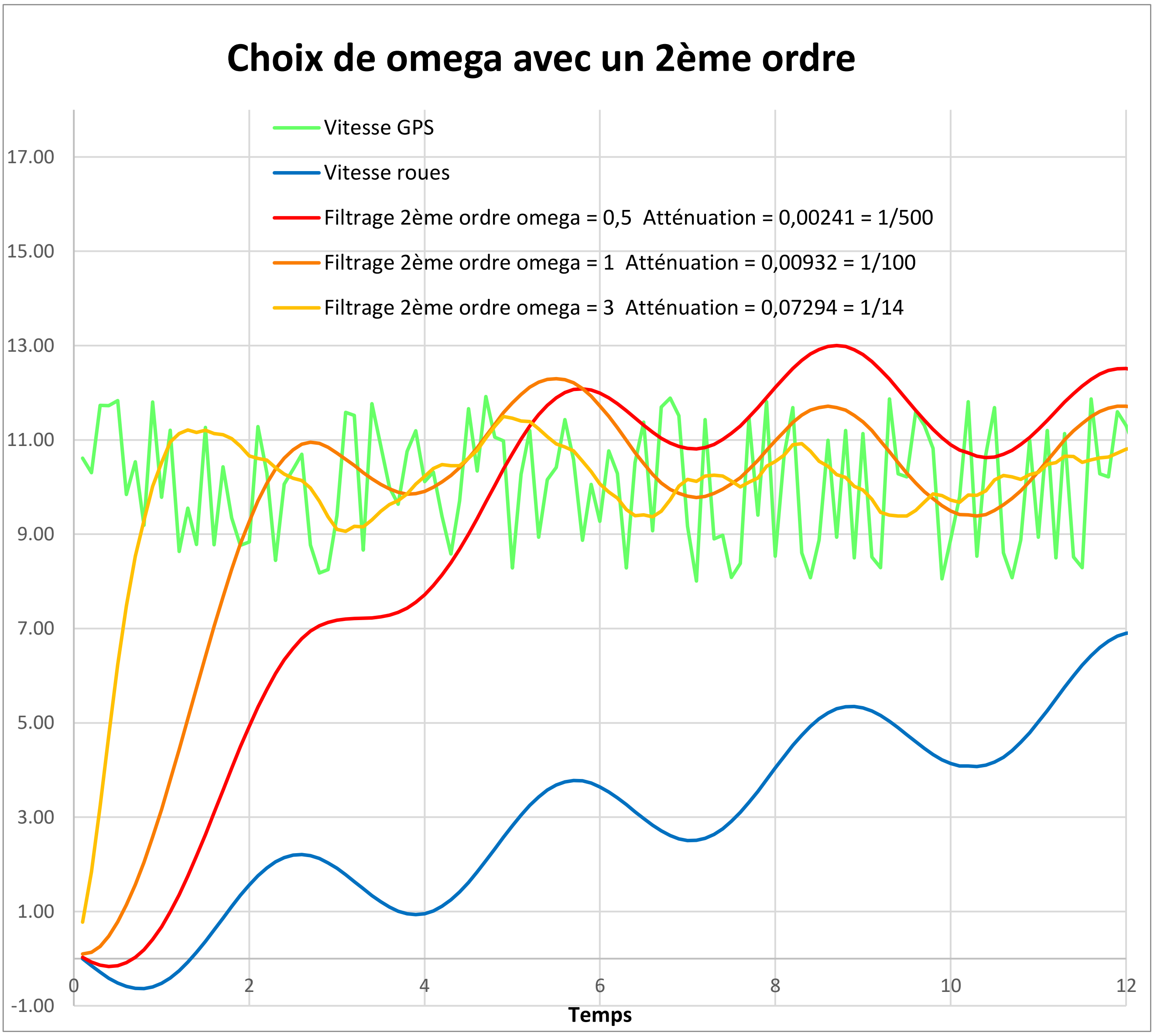
7.7 CHOIX DE LA FREQUENCE DE COUPURE ω

Sur l'exemple de la vitesse du véhicule, on peut voir sur un 2ème ordre, l'influence du choix de ω.

- Courbe jaune : atténuation faible, il reste du bruit, mais le ralliement est très rapide
- Courbe orange : Pratiquement plus de bruit, et un ralliement assez rapide.
- Courbe rouge : Pas de bruit, mais le ralliement et très lent et se fait en dehors de la zone graphique.

Le bon réglage dans ce cas est le choix de $\omega = 1$ ce qui donne une atténuation de 0,01.

Quel que soit l'ordre du filtre, le choix de ω se fera toujours sur le même principe, juste quand le bruit est suffisamment atténué.



7.8 EXEMPLE DU SATELLITE

Reprenons l'exemple du satellite au §.7.8.

T = 1Hz -> $\omega_0 = 2\pi f = 6{,}28 rd/s$

L'atténuation exigée est : $\propto = 000{,}1$

L'atténuation en dB correspondant est : 20 log $(000{,}1) = -60\mathrm{dB}$

	1er ordre	2ème ordre ($\xi = 0{,}7$)	3ème ordre ($\xi = 0{,}7$)
Atténuation $\propto$ (coefficient devant la mesure) = 0,001	$\propto = \omega T$	$\propto = \omega^2 T^2$	$\propto = \omega^3 T^3$
Pulsation de base ω	$\omega = \propto / T$ $0{,}001 rd/s$	$\omega = \sqrt{\propto / T^2} =$ $0{,}031 rd/s$	$\omega = \sqrt[3]{\propto / T^3} =$ $0{,}1 rd/s$
Constante de temps brute $\tau = 1 / \omega$	$\tau = 1000s$	$\tau = 31s$	$\tau = 10s$
Coef voir courbes de ralliement ci-dessus	$Coef = 1$	$Coef = 2$	$Coef = 3$
Constante de temps corrigée $= Coef\ x\ \tau$	$\tau = 1000s$	$\tau = 62s$	$\tau = 30s$
Ralliement à 95% x3	$3000s = 50mn$	$186s = 3mn$	$90s = 1mn30s$

On voit que le filtre du 3ème ordre à une pulsation de coupure de 0,1rd/s qui est de loin la plus élevée, ce qui signifie qu'on laisse intacts tous les signaux utiles qui sont en dessous de cette pulsation.

On voit que le filtre du 3ème ordre donne les meilleurs résultats et il aura un ralliement très rapide en cas de saut de la mesure, ou de trop d'erreurs de modèle du signal complémenté.

7.9 EXEMPLE VITESSE VEHICULE

On veut déterminer avec précision la vitesse d'un véhicule automobile. Pour cela on dispose de deux informations :

- A : la vitesse donnée par le GPS, qui est juste à basse fréquence (à long terme) mais qui est très bruitée à haute fréquence (à la seconde)
- B : la vitesse des roues : très précise à haute et moyenne fréquences, mais qui à basse fréquence peut être biaisée à cause du gonflage des pneus, ou de la charge du véhicule

La période d'échantillonnage est de 0,1s.

On veut une atténuation du bruit de la vitesse du GPS de 100 à la fréquence d'échantillonnage.

Prenons A, la vitesse du GPS, comme mesure de base : X_m c'est elle que nous devons filtrer.

Prenons B, la vitesse des roues, comme mesure complémentaire : X_c

Avec un 1er ordre

Si l'on prend un filtre expert du 1er ordre :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$

On suppose que l'information de vitesse du GPS est bonne à basse fréquence jusqu'à $f = 0{,}1Hz$ (Cte de temps 10s).

$$b = e^{-2\pi f T} = e^{-2\pi\, x\, 0.1\, x\, 0{,}1} = 0{,}939101$$

$$\boxed{\tilde{X} = 0{,}939101\,\tilde{X}_{-1} + 0{,}06089\,X_m + 0{,}939101(X_c - X_{c-1})}$$

Le coefficient devant la vitesse donnée par le GPS est de 0,06 (pour T = 0,1s). Si l'atténuation du bruit dans un rapport de 16, n'est pas suffisante, il faut prendre un filtre d'ordre supérieur.

Avec un 2ème ordre

Si l'on prend un filtre expert du 2ème ordre :

$$\boxed{\tilde{X} = a\,\tilde{X}_{-1} - b\,\tilde{X}_{-2} + (1-a+b)\,X_m + (a-b)\,X_c - a\,X_{c-1} + b\,X_{c-2})}$$

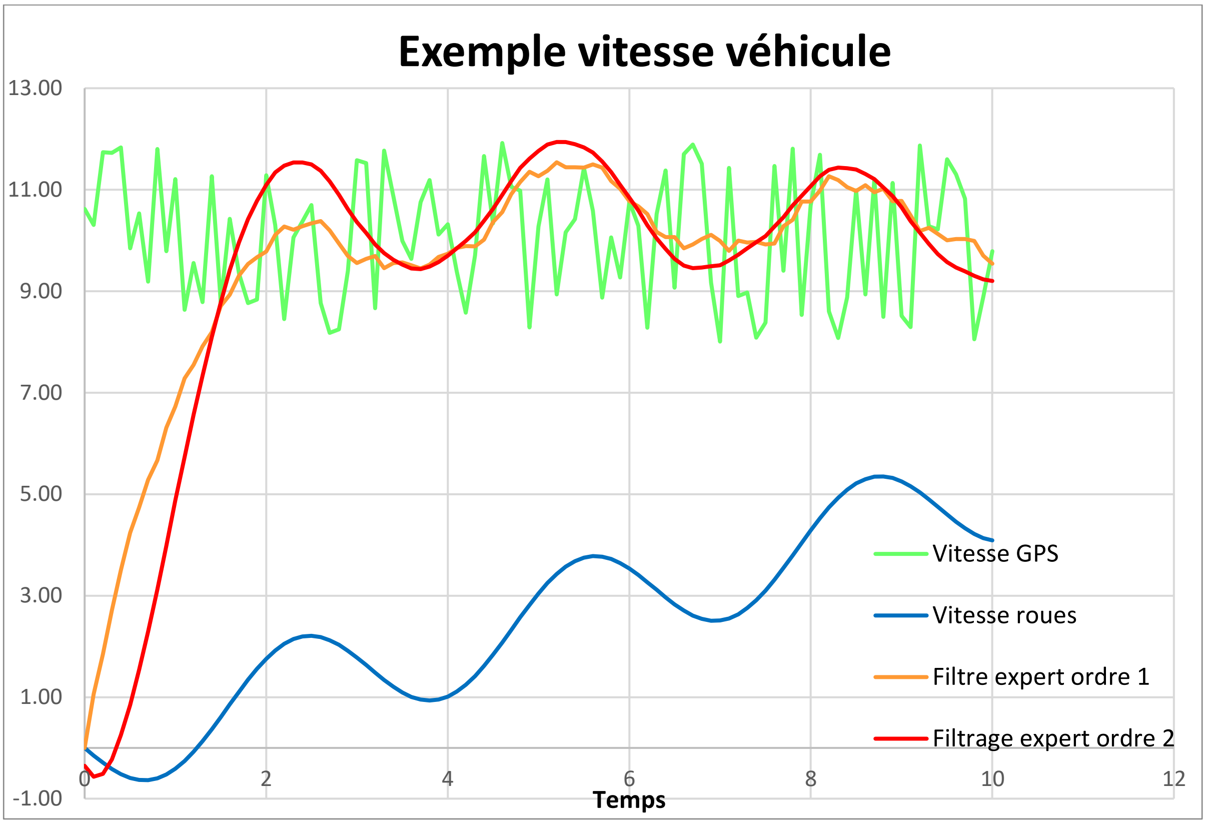
Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$ et $b = e^{-2\xi\omega T}$

$\xi = 0{,}7$ par défaut.

Le coefficient qui pondère la mesure est :

$$\propto = 1 - a + b \cong \omega^2 T^2 = 4\pi^2 f^2 T^2 = 4\pi^2 x 0{,}1^2 x 0{,}1^2 = 0{,}00394$$

Ce qui permet une atténuation du bruit dans un rapport de 250.



On voit bien sur le graphe ci-dessus :

- Pour les 2 filtrages, il y a prise en compte de la vitesse GPS à basse fréquence, et le ralliement vers celle-ci se fait assez vite
- Le bruit de la vitesse GPS est bien atténué, bien mieux avec le 2ème ordre
- Pour les 2 filtrages, il y a prise en compte de la vitesse roues à moyenne et haute fréquence, de plus, il y bien élimination de la dérive vers le haut (par exemple due à la pression des pneus)

C'est le même type de comportement que l'on obtiendrait avec l'exemple du satellite :

- La vitesse GPS du véhicule étant remplacée par la position GPS absolue du satellite
- La vitesse roues du véhicule étant remplacée par la position relative du satellite

8 PROGRAMMATION

8.1 EN INFORMATIQUE

C'est très simple :

Si $\widetilde{X}$, $\widetilde{X}_{-1}$, sont représentées informatiquement par `X et X1`

```
//Déclaration des variables locales devant être mémorisés entre chaque cycle,
//par exemple comme attributs d'un objet
float X1, a =0.0;                    // Déclaration de Xfiltre-1 et a
int init =0;                         // Indicateur init a eu lieu
// Procédure d'initialisation à appeler au moins une fois au début
void Init (omega, T):                // Fonction init à appeler au départ
     a := 1-exp(-2*pi()*omega*T);    // vérifier que a est petit et
     correspond
     init :=1;                       // bien à l'atténuation désirée
// Fonction de filtrage renvoyant la valeur filtrée à partir de la mesure
float Filter (Xm)                    // Fonction filtrer
     if (init) {X1 := Xm;}           // Init de Xfiltre-1 avec la 1ère mesure
     X = a * Xm + (1-a) * X1;        // Equation de filtrage
     X1 = X;                         // Rotation de X filtré pour devenir
     init :=0;                       // X filtré – 1 au coup suivant
     return X;
```

8.2 PRECAUTIONS A PRENDRE :

- **La rotation des variables :**

Si X, X_{-1}, X_{-2}, X_{-2} sont représentées informatiquement par `X,X1,X2,X3,` alors la rotation des variables s'écrit :

```
X3 := X2;
X2 := X1;
X1 := X;
```

Et non pas avec les instructions exécutées de bas en haut.

- **Pas d'approximation dans les calculs :**

Bien calculer les coefficients a, b, c, etc. à partir de ω, f, T et ne pas faire d'approximation.

- **Respecter la durée du cycle T.**

Bien faire les calculs de filtrage tous les T secondes.

8.3 AVEC EXCEL

Voici le tableau Excel qui a servi à réaliser l'exemple précédent :

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Temps	Vitesse GPS	Vitesse roues	Filtre 1er ordre	Filtre 2ème ordre	
3		T				1,5	omega
4						0,7	ksi
5		0,1			d	1,79033	a
6					0,9	0,81058	b
7		Init			0,00	0,00	
8		0			0,00	0,00	
9		0,1	10,61	0,00	0,00	-0,35	
10		0,2	10,30	-0,15	1,06	-0,57	
11		0,3	11,74	-0,29	1,85	-0,51	
12		0,4	11,73	-0,41	2,71	-0,23	
13		0,5	11,84	-0,52	3,50	0,25	
14		0,6	9,84	-0,59	4,24	0,84	

Ce tableau comprend 6 colonnes :

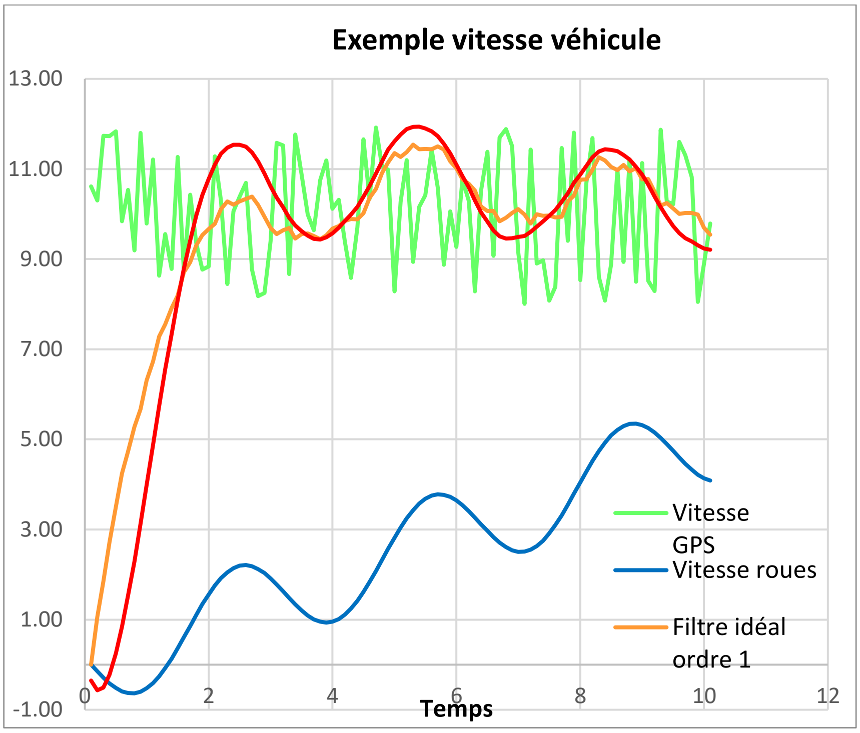
- Le temps
- Les 2 courbes de données de vitesses
- Les 2 courbes de filtrage
- Dans la colonne G, on a nommé les coefficients omega, ksi, a et b pour plus de clarté.

Voici toutes les équations du formulaire Excel :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Toutes les autres lignes s'obtiennent par recopie vers le bas de la ligne 9 (sélectionner la ligne + Ctrl B) où se trouvent les formules, sauf pour les 2 colonnes de vitesse (C et D) qui ont été remplies avec du bruit et une sinusoïde.

Pour obtenir le graphique, il suffit de sélectionner le tableau, et de faire insertion -> graphique en nuage de points pour obtenir ceci :


Exemple vitesse véhicule
13.00
11.00
9.00
7.00
5.00
3.00
1.00
-1.00
0
2
4
6
8
10
12
Temps
Vitesse GPS
Vitesse roues
Filtre idéal ordre 1

.

9 FILTRE EXPERT AVEC COMPLEMENTATION EN VITESSE

Nous allons voir des filtres experts complémentés en vitesse du 1er ordre, du 2ème ordre, etc. et nous allons voir que vous chacun, on peut ou non éliminer l'offset éventuel sur V.

Dans ce chapitre, on a toujours notre mesure de base $X_m$et nous avons en plus une information sur sa dérivée (la vitesse) :

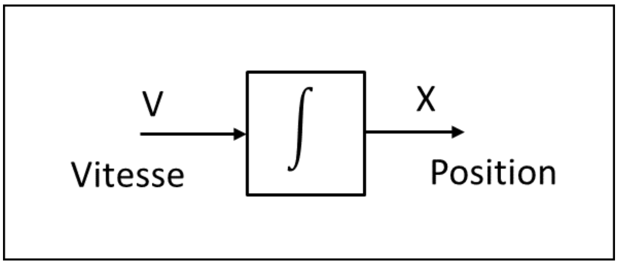
- Soit parce que nous avons une information (capteur) supplémentaire
- Soit c'est parce que le processus est commandé en vitesse, et que nous avons accès à cette commande, parce que c'est peut-être même nous qui la générons.

Nous allons voir qu'un biais sur cette vitesse va générer un biais sur la valeur filtrée, et qu'il faudra utiliser un ordre supplémentaire pour l'éliminer.

9.1 FILTRE EXPERT DU 1er ORDRE EN V (SANS ELIMINATION DU BIAIS)

Imagions maintenant que nous ne complémentions pas la mesure par une mesure équivalente, mais par une mesure correspondant à sa dérivée V.

Si on commande un processus en vitesse, on connait a priori cette vitesse, puisque c'est notre valeur de commande.



Si nous reprenons la formule de récurrence du filtre du 1er ordre avec complémentation en X :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$$

Avec : $b = e^{-\omega T}$

Or $X_c - X_{c-1} = X_c\,(1 - z^{-1})$ qui représente *V T*, où *V* est la dérivée de X_c

On peut donc écrire :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b\,VT}$$

Le coefficient devant la mesure vaut : $1 - b = e^{-\omega T}$

Si ωT est petit, alors le coefficient devant X_m est de l'ordre de ωT.

Exemple

Pour afficher la cartographie dans un véhicule, on a besoin de connaître de façon précise et fluide le cap du véhicule.

On ne dispose pas de centrale inertielle, mais on dispose :

- d'un GPS qui nous donne une information de cap, mais cette mesure est trop bruitée pour alimenter directement la cartographie du GPS qui ne serait pas fluide. C'est la mesure de base X_m.
- de l'angle des roues et de la vitesse du véhicule, ce qui nous permet de calculer la dérivée en cap : V de façon très précise.

Choix de la période d'échantillonnage :

Ce choix va souvent être lié à la cadence à laquelle on doit fournir l'information, dans ce cas on suppose que c'est tous les 0,1s. On pourrait être amené à échantillonner plus vite si cela permettait d'améliorer la qualité des informations qui nous sont fournies. Donc T=0,1s.

Atténuation :

Pour que la valeur filtrée soit satisfaisante et ne soit plus bruitée, on veut une atténuation du bruit sur X_m de 0,01 à la période d'échantillonnage.

Reprenons l'équation de filtrage :

$$\widetilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b\,VT \qquad \text{avec : } b = e^{-\omega T}$$

Le coefficient devant la mesure $X_m$vaut $\propto = 0{,}01 = 1 - b = 1 - e^{-\omega T}$

Comme le coefficient devant la mesure est petit $=> e^{-\omega T} \cong 1 - \omega T$

Le coefficient devant la mesure vaut donc $\propto = 0{,}01 = \omega T$

Comme T vaut 0,1s => $\omega = 0{,}01/0{,}1 = 0{,}1\mathrm{rd/s}$

Il faut maintenant refaire tous les calculs de façon précise avec $\omega = 0{,}1\mathrm{rd}/s$ et la vraie valeur de b.

$b = e^{-\omega T} = e^{-0{,}01} = 0{,}99005$

$$\boxed{\widetilde{X} = 0{,}99005\,\tilde{X}_{-1} + 0{,}00995\,X_m + 0{,}000995\,V}$$

Le prix à payer par rapport à l'exigence de l'atténuation du bruit dans un rapport de 100 à T=0,1s est que suite à un échelon sur $X_m$non mesurée par les roues ($V = 0$), le ralliement de la valeur filtrée va se faire avec une constante de temps :

$$\tau = 1/2\pi f = 1/\omega = 1/0{,}1 = 10s$$

Et un ralliement à 95% en $3\tau = 30s$
Ces temps peuvent paraitre trop longs, et cela permet d'introduire les filtres d'ordre plus élevés qui suivent, dont les coefficients ne sont plus en ωT mais en $\omega^2T^2, \omega^3T^3, \omega^4T^4, etc.$ ce qui permet, d'avoir des constantes de temps beaucoup plus courtes et des ralliements à la mesure très courts.

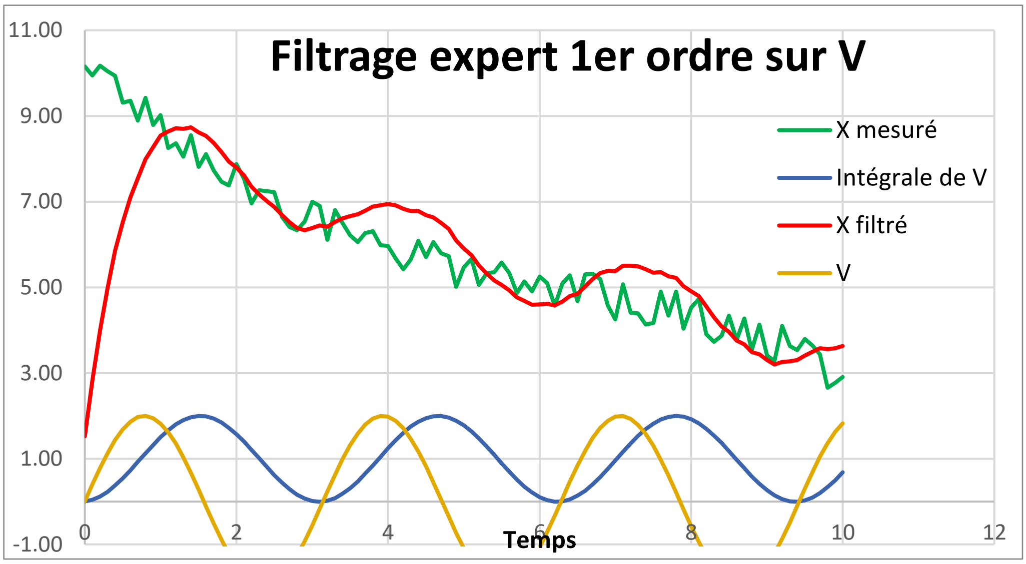
On a supposé que la vitesse en cap fournie par les roues **n'était pas biaisée et qu'il n'y avait pas de perturbations qui s'ajoutait à elle (effet du vent négligeable).**

Mais ceci est très rarement le cas, la plupart du temps, il faut utiliser les formules des chapitres suivants avec élimination du biais sur la dérivée.

Cet exemple est typiquement l'équivalent d'un filtre de Kalman, mais tout ce qui suit : ordres élevés, élimination du biais, filtres bouchons, n'est pas possible avec un filtre de Kalman**, et c'est toute la valeur ajoutée du filtrage expert.**

9.2 PROBLEMATIQUE DU BIAIS

Imaginons que pour un mobile, nous disposions d'une mesure de position X_m et de sa dérivée V.



Les courbes représentent :

- En vert : X_m qui est bruitée en haute fréquence
- En jaune : V sinusoïdale (par exemple)
- En bleu : $\int V dt$
- En rouge la valeur filtrée : $\tilde{X}$ obtenue par la formule précédente à partir de X_m et V.

Encore une fois, la valeur filtrée (en rouge) suit bien la courbe basse fréquence (en vert), et reproduit bien la dynamique sinusoïdale de l'intégrale de V (en bleu).

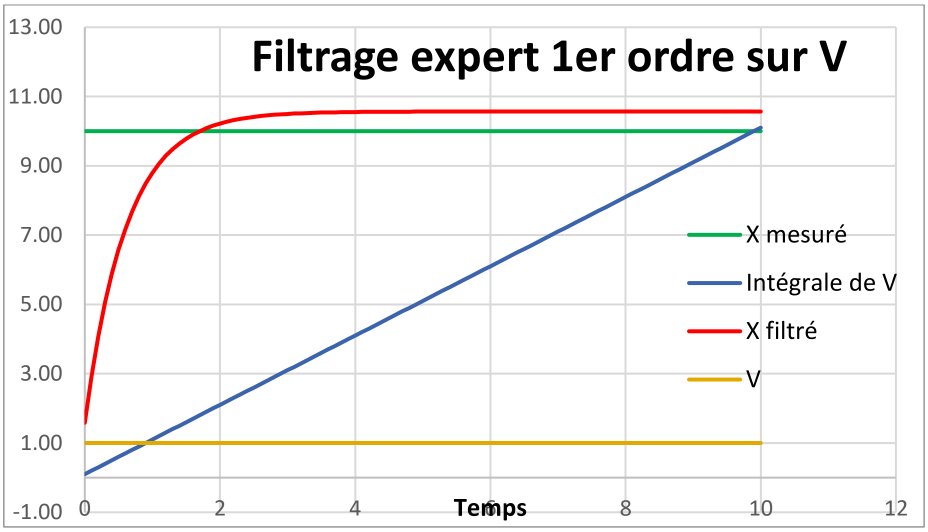
Biais sur V

Si la dérivée V possède un biais :

- par exemple parce qu'elle est obtenue par une intégrale,
- ou qu'il existe une vitesse de perturbation Vp que l'on ne connaît pas
- ou pour une autre raison

Ce biais va se retrouver sur la valeur filtrée, ce qui n'est pas désirable.

On voit apparaître un biais sur la valeur filtrée.



Les courbes représentent toujours les mêmes informations :

- En vert : X_m constante à 10
- En jaune : V constante à 1, alors que comme la mesure est stable, elle devrait être à 0
- En bleu : $\int Vdt$ droite qui monte
- En rouge la valeur filtrée : $\tilde{X}$ obtenue par la formule précédente à partir de X_m et V.

Le biais de la dérivée se reporte sur la valeur filtrée, si on ne prend pas de précaution.

Dans un filtre expert du 1er ordre, la valeur filtrée ne va pas éliminer le biais sur V.

Dans un filtre expert avec complémentation de la mesure par sa dérivée V, si on veut éliminer le biais sur V, Il faut augmenter l'ordre du filtre d'un cran.

Dans un filtre expert avec complémentation de la mesure par sa dérivée seconde γ, si on veut éliminer le biais sur γ, Il faut augmenter l'ordre du filtre de 2 crans.

Si l'on a un biais potentiel sur V, il est conseillé d'utiliser des filtres experts du 2ème ou 3ème ordre qui vont éliminer ce biais.

Mais si l'on n'a pas de biais sur $X_c - X_{c-1}$ et que l'on n'a pas de grandes performances fréquentielles à tenir, ce filtre fonctionne très bien.

Identification du biais :

De plus, on pourrait identifier ce biais instantané par l'équation :

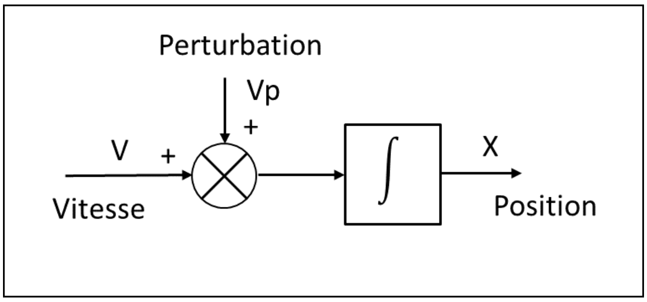
$$V_p = \frac{X_m - X_{m-1}}{T} - V$$

Et filtrer cette valeur par exemple par un filtre du 2ème ordre.

Mais ceci ne nous donne pas directement la valeur filtrée, pour cela, il suffit de prendre un filtre d'un ordre juste supérieur construit pour éliminer le biais.

9.3 FILTRE EXPERT DU 2eme ORDRE EN V AVEC ELIMINATION DU BIAIS

Supposons que nous ayons le même processus que précédemment avec un biais au niveau de V : Vp (vitesse de perturbation), cette dernière étant supposée inconnue.



Pour éliminer l'offset sur V (ou $(X_c - X_{c-1})/T$), nous avons vu qu'il fallait utiliser un filtre du 2ème ordre.

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Le filtre s'écrit :

$$\boxed{\tilde{X} = \blacksquare \tilde{X}_{-1} + \blacksquare\, \tilde{X}_{-2} + \blacksquare\, X_m + \blacksquare\, X_{m-1} + \blacksquare\, (V_{-1} - V_{-2})}$$

Ceci constitue donc un filtre du 1er ordre sur la mesure, complémenté en V et ceci sans offset puisque le modèle intervient en $V_{-1} - V_{-2}$.

Si ωT est $\ll 1$ alors les coefficients qui pondèrent les mesures brutes : X_m et X_{m-1} sont :

$A = 1 - b = 1 - e^{-2\xi\omega T}$ qui est voisin de $2\xi\omega T$

$B = 2b — a = 2\ e^{-2\xi\omega T} - 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$ qui est voisin de $-2\xi\omega T$

Connaissant le coefficient d'atténuation que l'on veut sur la mesure (A et B), on peut en déduire une idée de ω et donc de la fréquence de coupure f a priori.

Mais une fois trouvé $\boldsymbol{\omega}$ les calculs de tous les coefficients doivent être refaits avec une très grande précision.

Ce filtre peut servir également à reconstituer $\tilde{X}$ à partir de γ mais avec risque de biais :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si pour un f donné, on veut des coefficients sur X_m et X_{m-1} plus petits que ωT il faut prendre un filtre du 3e ordre.

Identification de la vitesse de perturbation V_p

On peut calculer la vitesse de perturbation instantanée :

$$V_p = \frac{X_m - X_{m-1}}{T} - V$$

Et filtrer cette valeur par exemple par un filtre du $2^{ème}$ ordre.

9.4 FILTRE EXPERT DU 3^{eme} ORDRE EN V AVEC ELIMINATION DU BIAIS

La formule de récurrence est (voir démonstration en annexe) :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si ωT est $\ll$ 1 alors les coefficients $A\ et\ B$ qui pondèrent la mesure valent environ :

A = *2 à 3* $\omega^2 T^2$

B = *-2 à -3* $\omega^2 T^2$ selon la valeur de ξ

On voit que les coefficients A et B qui pondèrent la mesure ($X_m\ et\ X_{m-1}$) sont très faibles, ce qui va nous permettre d'avoir des mesures filtrées avec un bruit résiduel très faible et sans retard, ce qui va nous permettre de commander par exemple des automatismes avec des gains puissants si besoin.

9.5 FILTRE EXPERT DU 4^{eme} ORDRE EN V AVEC ELIMINATION DU BIAIS

Il s'agit en fait d'un $3^{ème}$ ordre sur X_m**.** La formule de récurrence est (voir démonstration en annexe) :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Les coefficients sur X_m et X_{m-1} sont de l'ordre de *3 à 4* $\omega^3 T^3$ et -*3 à -4* $\omega^3 T^3$ suivant ξ.

9.6 CHOIX DU FILTRE COMPLEMENTE EN V

Voici les caractéristiques des différents filtres complémentés en V que nous avons vus :

Nature	Elimination du biais	Ordre sur la mesure	Atténuation : coef α devant Xm
1er ordre	non	1er ordre	ωT
2eme ordre	oui	1er ordre	$2\xi\omega T$
3eme ordre	oui	2eme ordre	$2\ \omega^2 T^2$
4eme ordre	oui	3eme ordre	$3\ à\ 4\ \omega^3 T^3$

Elimination du biais

Tout d'abord, il est fortement conseillé d'éliminer le biais. En effet, on a une mesure qui est supposée bonne à basse fréquence, et s'il existe un biais quelconque, après filtrage, on aura une valeur filtrée biaisée, ce qui n'est pas très professionnel.

Pour éliminer le biais, prendre un filtre au moins du 2ème ordre.

Ensuite le choix va se faire en fonction de l'atténuation que l'on souhaite avoir sur la mesure à la fréquence désirée.

Si ωT est petit, les coefficients A et B appliqués à la mesure sont :

- De l'ordre de $2\xi\omega T$ pour un filtre du 2ème ordre (1er ordre sur la mesure)
- De l'ordre de 2 à $3\ \omega^2 T^2$ pour un filtre du 3ème ordre (2ème ordre sur la mesure)
- De l'ordre de 3 à $4\ \omega^3 T^3$ pour un filtre du 4ème ordre (3ème ordre sur la mesure)

9.7 EXEMPLE

Reprenons l'exemple du véhicule dont on veut connaître parfaitement le cap.

On veut une atténuation du bruit de 100 sur X_m, α =0,01 à la période d'échantillonnage T=0,1s.

Dans le cas d'un 2ème ordre avec élimination du biais, cela ne va rien apporter car le coefficient d'atténuation est toujours en ωT

Dans le cas d'un 3ème ordre, le coefficient devant la mesure X_m vaut $\propto = 2\omega^2 T^2 = 0{,}01$

Comme T vaut 0,1s => $\omega^2 = 0{,}01/2T^2 = 0{,}5$

Soit $\omega = 0{,}7 rd/s$ qui donne une pulsation de coupure 7 fois plus importante.

On a une constante de temps de ralliement de

$$\tau = 1/2\pi f = 1 / 0{,}7 = 1{,}4s$$

Au lieu de 10 secondes avec le 1er ordre.

Il faut maintenant refaire tous les calculs de façon précise avec $\omega = 0{,}7 \mathrm{rd/s}$.

L'élimination du biais est inutile dans cet exemple mais est bien pratique dans la plupart des cas.

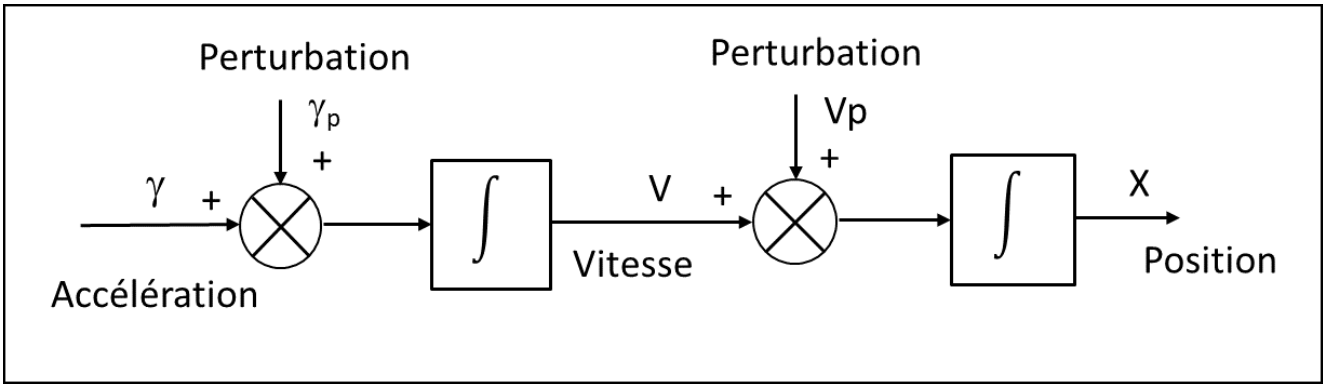
10 FILTRE EXPERT AVEC COMPLEMENTATION EN γ

Imagions maintenant que nous ne complémentions pas la mesure par sa dérivée V mais par sa dérivée seconde, ou son accélération.

Si on commande un processus en force, on connait a priori cette accélération, puisque l'on connait a priori le modèle du processus.

Imaginons de plus qu'il y ait aussi des perturbations inconnues :

- une accélération (ou force) de perturbation γ_p
- une vitesse de perturbation V_p



10.1 FILTRE EXPERT DU 3E ORDRE AVEC ELIMINATION DU BIAIS SUR $\boldsymbol{\gamma}$

La formule de récurrence du filtre est (cf démonstration en annexe) :

$$\boxed{\tilde{X} = \blacksquare\tilde{X}_{-1} + \blacksquare\tilde{X}_{-2} + \blacksquare\tilde{X}_{-3} + \blacksquare X_m + \blacksquare X_{m-1} + \blacksquare X_{m-2} + \blacksquare T^2(\gamma_{-1} - \gamma_{-2})}$$

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si ωT est $\ll 1$ alors les coefficients A, B *et* C qui pondèrent la mesure valent environ :

A et C= 2 à 3ωT

et $\quad$ *B = -4 à -6ωT* selon la valeur de ξ

NB : En fait l'accélération mesurée sur le processus, peut ne pas être instantanée, et il peut être préférable d'écrire $\gamma_{-2} - \gamma_{-3}$

Ce filtre est également insensible aux perturbations en vitesse, car la vitesse n'intervient pas dans l'équation de récurrence.

Ce filtre est insensible aux perturbations en accélération car l'équation de récurrence comporte $(\gamma_{-1} - \gamma_{-2})$.

10.2 FILTRE EXPERT DU 4E ORDRE AVEC ELIMINATION DU BIAIS SUR γ

(2ème ordre sur X_m)

L'équation de récurrence est :

$$\boxed{\begin{gathered}\tilde{X} \;=\; \blacksquare\tilde{X}_{-1} + \blacksquare\tilde{X}_{-2} + \blacksquare\tilde{X}_{-3}\blacksquare\tilde{X}_{-4} \;+ \blacksquare X_m + \blacksquare X_{m-1} + \blacksquare X_{m-2} \\ +[\blacksquare\gamma_{-1} + \blacksquare\gamma_{-2} + \blacksquare\gamma_{-3}]\,T^2\end{gathered}}$$

Avec

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si $\omega T \ll 1$ les coefficients sur X_m et X_{m-1} valent environ :

- $A\ et\ C$= 4 à $6\omega^2T^2$
- B =-8 à $-\ 12\omega^2T^2$ selon la valeur de ξ

On en déduit une valeur de $\omega^{\square}T^{\square}$, en fonction de l'atténuation que l'on souhaite sur les mesures, puis on refait tous les calculs une fois ωT défini.

11 FILTRE EXPERT DE COMPLEMENTATION PAR L'INTEGRALE ET LA DERIVEE

11.1 COMPLEMENTATION PAR L'INTEGRALE ET LA DERIVEE (1er ordre)

On suppose que l'on dispose de :

- X_m la position, qui n'est pas biaisée, mais qui peut être bruité aux hautes fréquences.
- γ l'accélération, qui peut être biaisée, mais qui fournit une bonne information aux hautes fréquences

On veut reconstituer la meilleure vitesse possible V.

Aux basses fréquences, on va utiliser simplement la dérivée de $X = \frac{(X_m - X_{m-1})}{T}$

Et on va complémenter par l'intégrale de γ, mais pour éliminer l'offset, on va faire apparaître dans le complément un terme en $\gamma_{-1} - \gamma_{-2} = \gamma_{-1}(1 - z^{-1})$

Il faut donc prendre un filtre du 2ème ordre, ce qui donnera un 1er ordre sur la mesure.

Texte disponible uniquement dans la version complète.

L'équation de récurrence est donc :

$$\boxed{\tilde{V} = \blacksquare\tilde{V}_{-1} + \blacksquare\tilde{V}_{-2} + \blacksquare X_m + \blacksquare X_{m-1} + \blacksquare X_{m-2} + \blacksquare(\gamma_{-1} - \gamma_{-2})T}$$

Les coefficients sur $X_m, X_{m-1}, X_{m-2},$ sont égaux à $2\xi\omega T, -4\xi\omega T,\ 2\xi\omega T$

Si ces coefficients sont trop élevés par rapport au bruit résiduel souhaité, prendre le filtre du 3ème ordre suivant.

11.2 COMPLEMENTATION PAR L'INTEGRALE ET LA DERIVEE (2eme ordre)

On prend cette fois la formule du filtre expert du 3ème ordre avec élimination d'offset sur V (qui est γ dans notre cas).

$$\boxed{\tilde{V} = \blacksquare\tilde{V}_{-1} + \blacksquare\tilde{V}_{-2} + \blacksquare\tilde{V}_{-3} + \blacksquare X_m + \blacksquare X_{m-1} + \blacksquare X_{m-2} + \blacksquare\ \gamma_{-1} + \blacksquare\gamma_{-2} + \gamma_{-3}\blacksquare\ )}$$

Si ωT est petit, les coefficients A et B appliqués à la mesure sont : $A = 2$ à $3\omega^2 T^2$ et

$B = -2$ à $-3\omega^2 T^2$ suivant ξ

Exemple :

La position d'un mobile est connue avec un bruit σ_X de 3m.

On veut un bruit résiduel sur la vitesse filtrée σ_V de 3cm/s (T=0,1s).

Il nous faut une atténuation (coef devant V_m) : $A = -B = \sigma_V * T/\sigma_X = 3 * 0{,}1/300 = 0{,}001$

$A = -B = 3\omega^2 T^2 = 0{,}001 => 3\omega^2 = 0{,}001/0{,}01 => \omega^2 = 1/30$

$D'où\ \omega = 1/\tau = 1/5{,}5 => \tau = 5{,}5s$

L'atténuation est de 1/1000ème et pourtant le recalage sur la basse fréquence de $\frac{X_m - X_{m-1}}{T}$ est effectué avec une constante de temps de 5,5s et en éliminant l'erreur de modèle (le biais sur γ).

11.3 RECONSTITUTION D'UN SIGNAL AVEC L'INFO, L'INTEGRALE, LA DERIVEE

On suppose que l'on dispose de :

- V_m qui est l'information de base que l'on doit filtrer en utilisant toutes les informations
- X qui est son intégrale et qui peut faire apparaître un biais sur V
- γ qui est la dérivée, et qui va permettre d'éliminer le bruit haute fréquence sur V

On commence par faire un filtre expert avec V_m que l'on complémente par sa dérivée γ. On obtient $\tilde{V}_1$.

On élimine ainsi les bruits hautes fréquences.

On fait ensuite un filtre expert avec $V = (X_m - X_{m-1})/T$ (qui est la meilleure information à basse fréquence), que l'on complémente par $\tilde{V}_1$. On a ainsi éliminé les bruits basses fréquences, les biais.

12 FILTRE EXPERT DE COMPLEMENTATION D'UN FILTRE BOUCHON

On reprend la formule de filtrage du filtre bouchon :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Avec

$$a = 2\, e^{\frac{-\omega T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega T$$

$$b = e^{-\omega T}$$

$$c = \frac{1-\beta}{\omega T}(1 - a + b)$$

β est le coefficient d'atténuation.

Par exemple si $\beta = 0{,}1$, l'atténuation est de 10 à la pulsation ω.

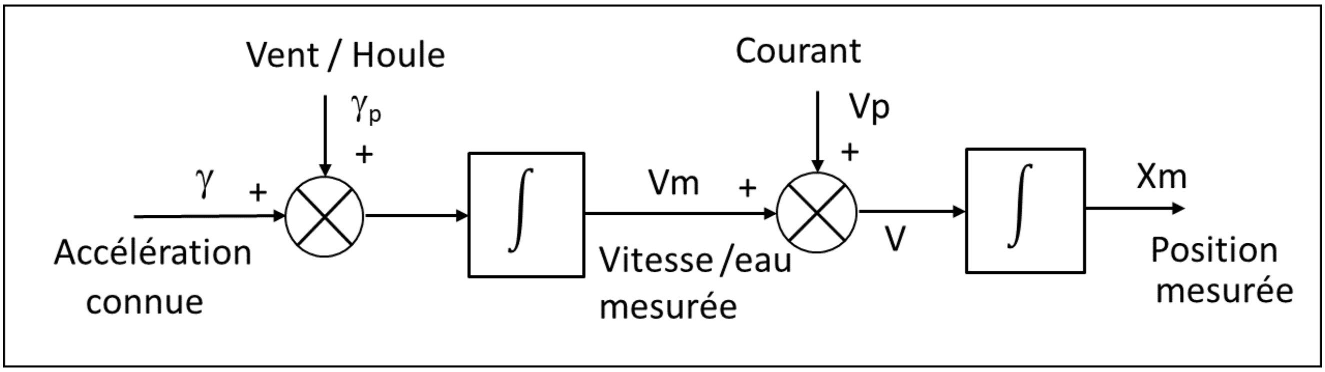
L'équation de récurrence est donc :

$$\boxed{\tilde{X} = \blacksquare \tilde{X}_{-1} + \blacksquare \tilde{X}_{-2} + \blacksquare X_m + \blacksquare X_{m-1} + \blacksquare X_{m-2} + \blacksquare (X_c - X_{c-1})}$$

13 EXEMPLE DU NAVIRE 1

On souhaite obtenir des informations filtrées sur un navire afin de réaliser la commande des propulseurs.

Pour ne pas provoquer de bruit sur les propulseurs, on a besoin d'éliminer au maximum le bruit sur les mesures.



On dispose de :

- γ : accélération appliquée au navire
- V_m vitesse par rapport à l'eau
- X_m position mesurée

On veut disposer des valeurs filtrées suivantes :

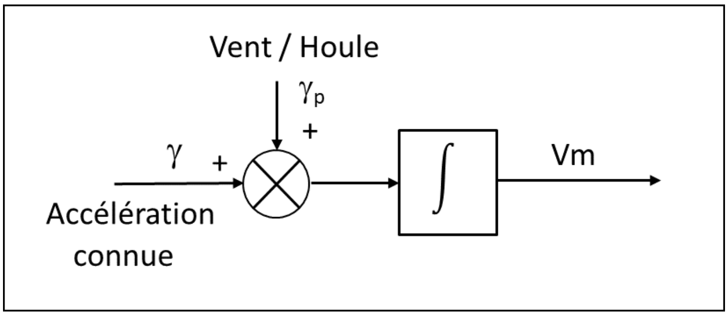
- $\tilde{V}$ vitesse filtrée par rapport à l'eau : bruit à diviser par 50
- $\tilde{X}$ position filtrée : bruit à diviser par 50

On voudrait identifier :

- γ_p : accélération de perturbations supposée assez permanente : vent, houle, erreurs de modèle
- V_p : courant supposé également permanent

13.1 ETAPE 1 : CALCUL DE $\tilde{V}$

On réalise un filtrage expert du 3eme ordre en V avec élimination du biais (γ_p)



La formule de récurrence est :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Coefficients en $\omega^2 T^2$ = 0,01

T=1s $=> \omega^2 = 0{,}01 => \omega = 0{,}1\, rd/s$ ce qui donne une constante de temps de ralliement :

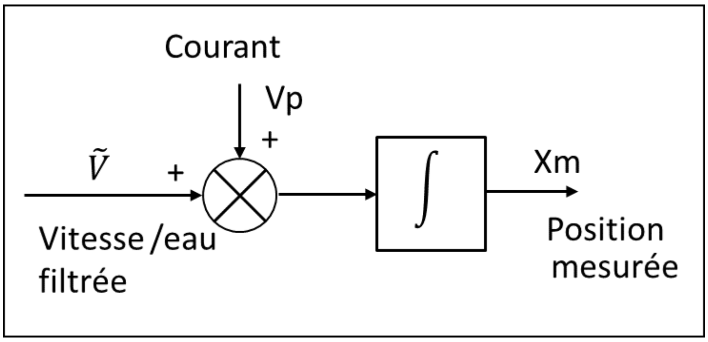
$\tau = 1/\omega = 10$, ce qui n'est pas trop important.

On peut en déduire la valeur de γ_p instantané : $\frac{V_m - V_{m-1}}{T} - \gamma$.

On peut ensuite filtrer cette valeur par un 2ème ordre pour obtenir γ_p.

13.2 ETAPE 2 : CALCUL DE $\tilde{X}$

On réalise un filtrage expert du 3eme ordre en V en utilisant $\tilde{V}$ et avec élimination du biais (V_p)



La formule de récurrence est la même :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

On peut en déduire la valeur de Vp instantané : $(X_m - X_{m-1})/T - V_m$.

On peut ensuite filtrer cette valeur par un 2ème ordre pour obtenir le courant Vp.

Résultats :

Les deux étapes du problème sont strictement identiques. Il suffit de remplacer accélération en vitesse et vitesse en position.

Observons simplement la 2ème partie avec les valeurs suivantes :

- ω = 0,1
- ξ = 0,7
- a = 1,86003

- b = 0,86936
- c = 0,90484
- A = 0,02087 Le coefficient devant la position mesurée est bien de 1/50ème
- B = -0,01998 Idem
- C = 1,76576
- D = -0,78663

Filtrage courant 2ème ordre :

- ω = 0,1
- ξ = 0,7

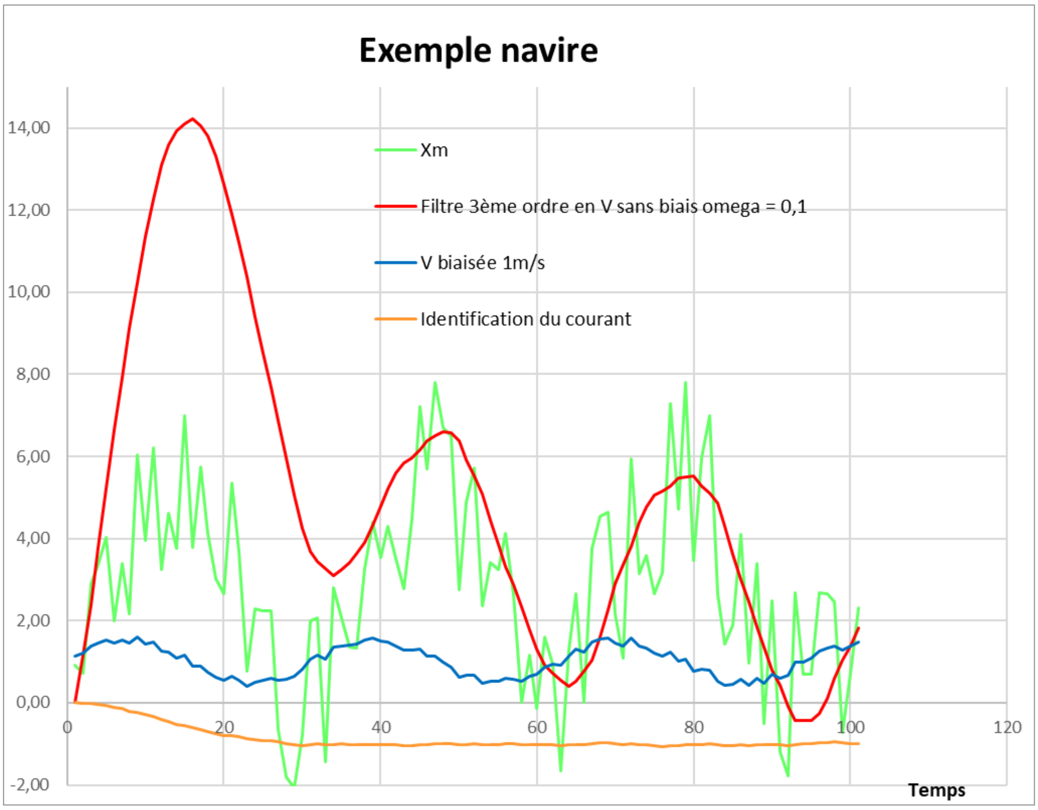
On voit en bleu, la courbe représentant la vitesse mesurée, volontairement biaisée d'un m/s en positif, et bruitée de 0,25m/s et qui sert de mesure.

En vert la position bruitée de 5m, qui ne dérive pas, bien que la vitesse reste positive, car c'est le biais (courant), qui sert de mesure également.

On voit en orange en bas, l'identification du courant qui se fait assez rapidement.

On voit en rouge la position filtrée : celle-ci part au début assez haut, car une dérive de 1m/s, cela fait 20m au bout de 20s. Tous ces phénomènes transitoires pourraient être corrigés en soignant les valeurs initiales, mais elles sont laissées volontairement pour montrer ce que l'on « perd » à trop filtrer.

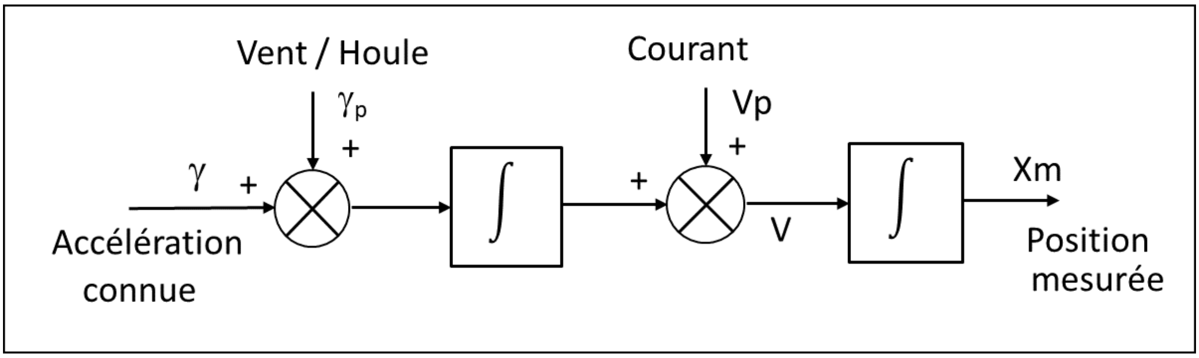
On voit que cette courbe a bien atténué le bruit, à la fois dû au capteur de vitesse et au capteur de position, et que cette courbe finit par bien rester calée sur la mesure en vert.



14 EXEMPLE DU NAVIRE 2

On souhaite obtenir des informations filtrées sur un mobile (navire) afin de réaliser la commande des actionneurs.

On a le même exemple que précédemment, sauf que maintenant, on n'a plus la mesure intermédiaire de vitesse.



On dispose simplement de :

- γ : accélération appliquée au navire (au mobile en général)
- X_m position mesurée

On veut disposer de la valeur filtrée suivante :

- $\tilde{X}$ position filtrée : bruit à diviser par 50
- $\tilde{V}$ vitesse filtrée par rapport au fond

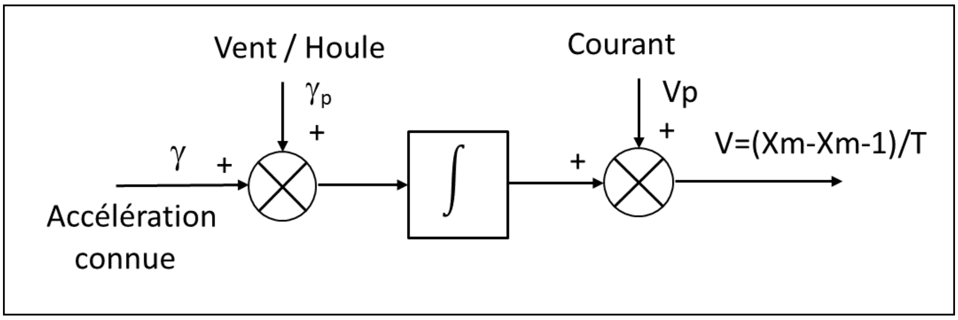
On voudrait de plus identifier :

- γ_p : accélération de perturbations supposée à peu près permanente : vent, houle, erreurs de modèle

Comme on ne dispose d'aucune mesure de vitesse, on ne pourra pas identifier V_p qui se confond avec l'intégrale du biais de l'accélération.
On va utiliser un filtrage expert de COMPLEMENTATION PAR L'INTEGRALE ET LA DERIVEE. On prend un 2ème ordre car il est demandé un coefficient d'atténuation assez faible donc plutôt en $\omega^2 T^2$.

On utilise comme vitesse mesurée $V_m = (X_m - X_{m-1})/T$

Le diagramme devient :



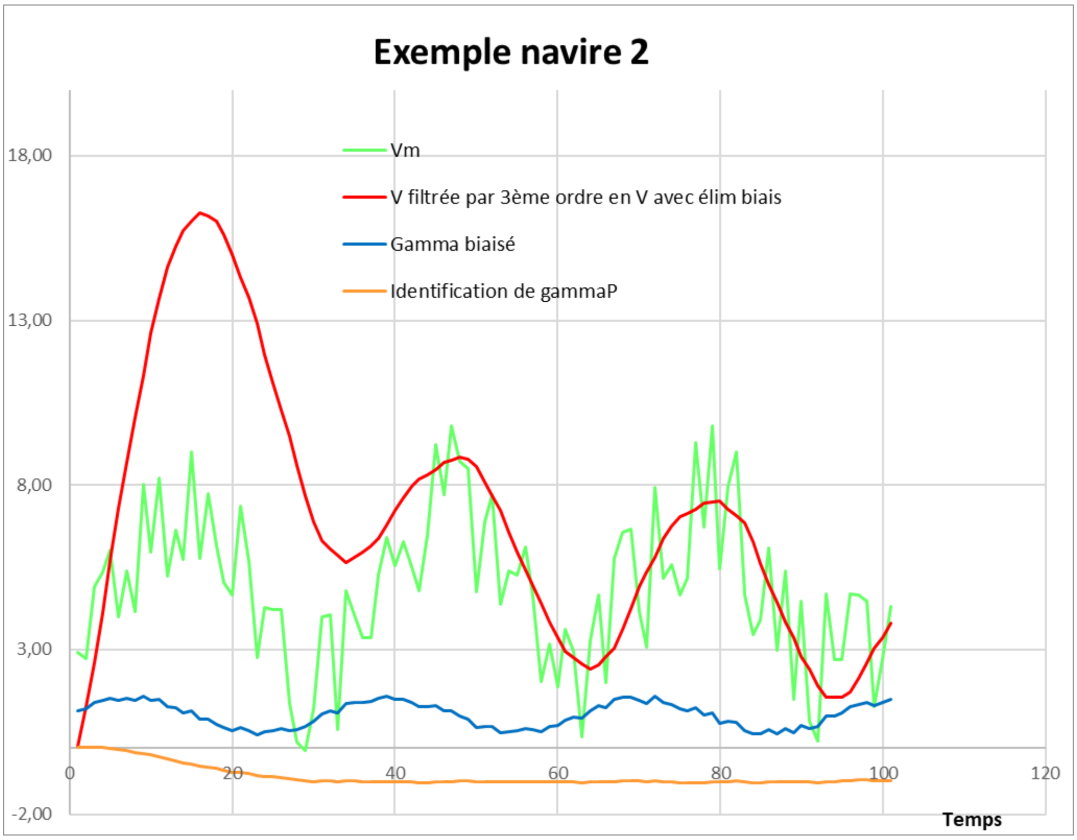
On retrouve la même formule que précédemment, décalée d'un étage de dérivée :

X devient V, et V devient γ.

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Et : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$ $\quad b = e^{-2\xi\omega T}$ $\quad c = e^{-\omega T}$

On a repris les mêmes coefficients que dans l'exemple du navire 1, on obtient donc les mêmes résultats graphiques, décalés d'un étage de dérivée :



 FILTRAGE EXPERT SIRET 841 714 090 mél : filtrage.expert@gmail.com

Calcul de la position filtrée :

On pourrait penser à utiliser la mesure X_m et la vitesse filtrée $\tilde{V}$ précédemment calculée.

Mais comme la vitesse filtrée a été calculée à partir de $(X_m - X_{m-1})/T$, on risque de reboucler.

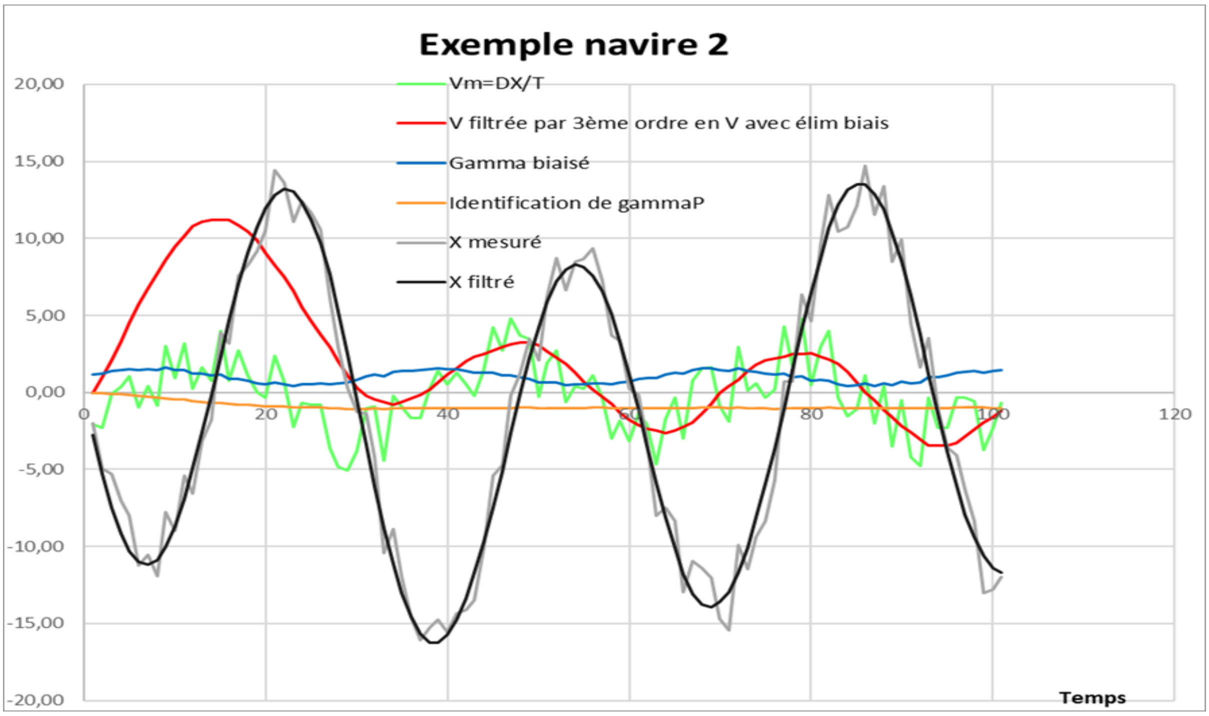
Il vaut mieux retourner aux deux informations de base : $X_m\ et\ \gamma$

On va prendre un filtre expert du 4ème ordre sur γ avec élimination du biais, pour avoir au final un 2ème ordre.

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si $\omega T \ll 1$ les coefficients sur X_m et X_{m-1} valent environ :

- $A\ et\ C$= 4 à $6\omega^2 T^2$
- B =-8 à $-12\omega^2 T^2$ selon la valeur de ξ



15 ANNEXE 1 : RAPPELS D'AUTOMATISME

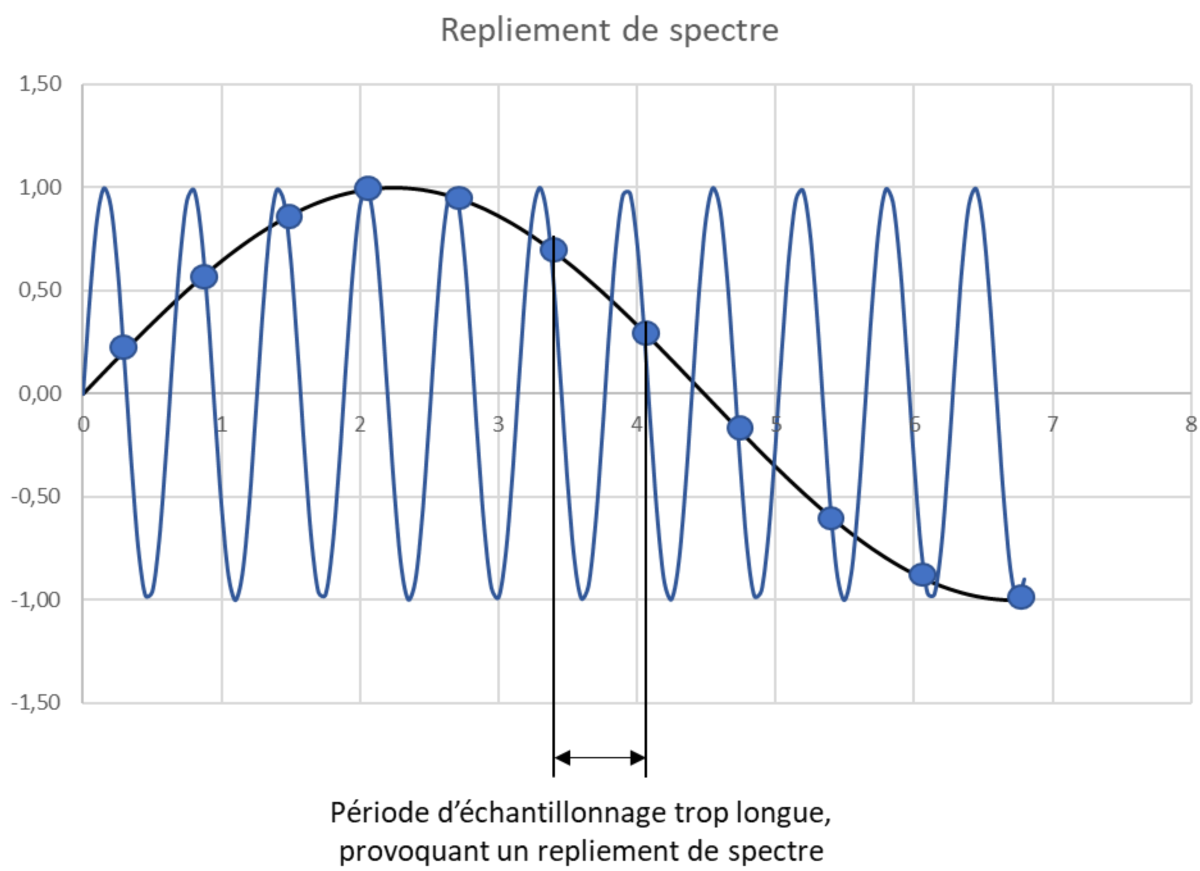
Ceux qui ne sont pas très familiers avec les transformées en z peuvent retrouver les bases à l'aide de cette annexe.

15.1 REPLIEMENT DE SPECTRE

Le repliement de spectre est un phénomène indésirable, qui provient du fait que si l'on échantillonne un signal sinusoïdal à une fréquence voisine de celui-ci, on peut obtenir une nouvelle sinusoïde d'une fréquence beaucoup plus basse.

C'est le même phénomène que celui qui permet de voir au cinéma, les roues d'un chariot tourner lentement (voire à l'envers), alors que celui-ci avance très vite.

Exemple :



Donc, avant toute technique de filtrage numérique à partir d'une information analogique, il est impératif :

- Soit d'échantillonner à une fréquence nettement supérieure à toutes celles contenues dans le signal à filtrer
- Soit de mettre sur le signal un filtre analogique passe-bas avant conversion analogique/numérique de manière à éviter le repliement de spectre. Ce filtre passe-bas doit être à une fréquence suffisamment haute pour ne pas retarder l'information.

THEOREME DE SHANNON

La fréquence d'échantillonnage doit être égale au moins à 2 fois la fréquence des signaux utiles à traiter. Préférer quand même 5 fois.

15.2 TRANSFORMEES EN Z

Nous aurons par la suite à utiliser des formules de transformées en z.

Il suffit de savoir qu'une variable multipliée par z^{-1}, revient à prendre cette variable à la période d'échantillonnage précédente.

C'est déroutant, mais c'est très simple :

X est l'information au cycle de calcul en cours

X_{-1} est l'information au cycle d'échantillonnage précédent :

$$\boxed{X_{-1} = X \cdot z^{-1}}$$

De la même manière : $X_{-2} = X_{-1} \cdot z^{-1} = X \cdot z^{-2}$

15.3 TRANSMITTANCE

Une transmittance en Z est une fonction en z qui permet d'obtenir une grandeur à partir d'une autre :

Par exemple, la transmittance suivante, donne X filtré ($\tilde{X}$) à partir de X mesuré (X_m) :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 2\mathrm{z}^{-1} - 2\mathrm{z}^{-2}}$$

Cette formule s'écrit aussi :

$$\tilde{X}\,(1 + 2z^{-1} - 2z^{-2}) = X_m\,(2 - z^{-1})$$

On aura donc : $\tilde{X} + 2\,\tilde{X}_{-1} - 2\,\tilde{X}_{-2} = 2\,X_m - X_{m-1}$

Soit la formule de récurrence du filtre : $\tilde{X} = -2 \cdot \tilde{X}_{-1} + 2\,\tilde{X}_{-2} + 2\,X_m - X_{m-1}$

Ce qui permet d'avoir *X* filtré en fonction de X mesuré.

Pour effectuer ces calculs en informatique, il faut donc prévoir de mémoriser $\tilde{X}$ dans deux mémoires et X_m dans une mémoire, mémoires que l'on décale à chaque période d'échantillonnage.

Période	T	T+1
Valeur filtrée	$\tilde{X}$	$\tilde{X} = \cdots$
Valeur filtrée mémorisée 1	$\tilde{X}_{-1}$	$\tilde{X}_{-1}$
Valeur filtrée mémorisée 2	$\tilde{X}_{-2}$	$\tilde{X}_{-2}$
Nouvelle valeur mesurée	X_m	X_m
Valeur mesurée mémorisée 1	X_{m-1}	X_{m-1}

D'autre part, en régime permanent (aux très basses fréquences), $X_{-1} = X$

Donc le gain en régime permanent (gain statique) s'obtient en faisant $z^{-1} = 1$ et ce gain statique doit être égal à 1.

Dans l'exemple précèdent, en faisant $z^{-1} = 1$, on voit que le gain statique est bien de $\frac{2-1}{1+2-2} = 1$

15.4 FILTRE DU 1er ORDRE

Si la fréquence du bruit d'un signal est très supérieure à la fréquence utile de ce signal, on peut utiliser un filtre classique du 1 er ordre et le retard apporté à la fréquence utile sera alors négligeable.

La fonction de transfert d'un filtre du 1 er ordre est :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}}$$

Dans laquelle X_m désigne° la valeur mesurée *et* $\tilde{X}$ la valeur filtrée :

Soit :

$$\tilde{X}\,(1-b\,\mathrm{z}^{-1}) = X_m(1-b)$$

Comme $\tilde{X}\ \mathrm{z}^{-1} = \tilde{X}_{-1}$ on obtient : $\tilde{X} - b\,\tilde{X}_{-1} = X_m(1-b)$

Soit : $\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m}$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$

Avec X_m : valeur mesurée

$\tilde{X}$: valeur filtrée

$\tilde{X}_{-1}$: valeur filtrée de la période d'échantillonnage précédente.

T la période d'échantillonnage (en seconde)

f la fréquence de coupure des filtres.

ω la pulsation de coupure des filtres ($=2\pi f$).

15.5 FILTRE DU 2ème ORDRE

La structure générale d’un filtre du 2e ordre est :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{1 - a + b}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}$$

Soit :

$$\boxed{\tilde{X} = a\,\tilde{X}_{-1} - b\,\tilde{X}_{-2} + (1 - a + b)\,X_m}$$

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos(\omega T\sqrt{1-\xi^2})$

et $b = e^{-2\xi\omega T}$

ω est la pulsation de coupure du filtre (= 2πf)

Choix de ξ : en général ξ est compris entre 0,5 et 1.

La valeur ξ = 0,7 est conseillée, sauf cas pointu.

Sinon voici les valeurs des gains à f, 2f et 10f pour 3 valeurs standards de ξ : 0,5, 0, 7 et 1

	f	2f	10f	Déphasage à f/2
ξ = 0,5	1,15	1/3,6	1/100	34°
ξ = 0,7	1	1/4	1/100	43°
ξ = 1	0,5	1/5	1/100	53°

L'avantage du filtre du 2^{e} ordre par rapport au 1 ^{er} ordre est d'avoir une atténuation plus importante pour les fréquences supérieures à f, tout en conservant un gain voisin de 1 autour de f.

En fait, comme précédemment, ce qui est en général intéressant, c'est le coefficient appliqué à la mesure : $\alpha = 1 — a + b$

Pour α < 0,1 on a $\alpha = \omega^2T^2 = 4\pi^2 f^2 T^2$

Ce qui donne une idée de f, fréquence à laquelle on laisse encore passer le signal.

Mais il faut recalculer à partir de f les coefficients a et b.

Attention : Les approximations de calcul sont interdites car elles ne donnent pas les résultats attendus.

15.6 FILTRE DU 3ème ORDRE

L'équation générale du filtre 3ème ordre est le produit d'un 2ème ordre par un 1 er ordre :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{(1-a+b)(1-c)}{(1-az^{-1}+bz^{-2})(1-cz^{-1})}$$

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega_1 T}\cos\left(\omega_1 T\sqrt{1-\xi^2}\right)$

$b = e^{-2\xi\omega_1 T}$

$c = e^{-\omega_2 T}$

En général, la fréquence de coupure des 2 filtres est identique et $\omega = \omega_1 = \omega_2$

L'équation de récurrence est :

$$\boxed{\tilde{X} = (a+c)\,\tilde{X}_{-1} - (b+ac)\,\tilde{X}_{-2} + bc\,\tilde{X}_{-3} + (1-a+b)(1-c)X_m}$$

Le coefficient appliqué à la mesure : $\alpha = (1-a+b)(1-c)$ peut être approximé.

Si $\alpha < 1$, on a $\alpha = \omega^3 T^3 = 8\,\pi^3 f^3 T^3$, ce qui permet d'avoir une idée de f.

A fréquence de coupure égale, le coefficient α devient encore plus petit qu'avec un filtre du 2ème ordre, ce qui permet d'atténuer encore plus le bruit éventuel sur la mesure.

15.7 FILTRE DU 4ème ORDRE

On écrit le produit de 2 filtres du 2e ordre

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{(1-a+b)^2}{(1-az^{-1}+bz^{-2})^2}$$

$$\tilde{X}\,(1-(az^{-1}-bz^{-2}))^2 = (1-a+b)^2\,X_m$$

$$\tilde{X}(1-2(az^{-1}+bz^{-2}) + (az^{-1}-bz^{-2})^2) = (1-a+b)^2\,X_m$$

$$\tilde{X}(1-2az^{-1}+2bz^{-2} + a^2z^{-2} - 2abz^{-3} + b^2z^{-4}) = (1-a+b)^2\,X_m$$

Soit :

$$\boxed{\tilde{X} = 2a\,\tilde{X}_{-1} - (2b + a^2)\,\tilde{X}_{-2} + 2ab\,\tilde{X}_{-3} - b^2\,\tilde{X}_{-4} + (1-a+b)^2\,X_m}$$

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$

et $b = e^{-2\xi\omega T}$

15.8 FILTRE BOUCHON

Le filtre bouchon est très utile pour éliminer une fréquence gênante fixe d'un signal.

Exemples :

Vitesse de rotation de la toupie d'un gyromètre

Fréquence propre d'une vibration mécanique

Etc. ...

La formule d'un filtre bouchon est :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{1 - c + \ (c - a)\, z^{-1} + b\, z^{-2}}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}$$

Soit :

$$\boxed{\tilde{X} \ = \ a\, \tilde{X}_{-1} - b \ \ \tilde{X}_{-2} + (1 - c)\, X_m + (c - a)\, X_{m-1} + b\, X_{m-2}}$$

Avec :

$$a \ = 2\, e^{\frac{-\omega T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \omega T$$

$$b = e^{-\omega T}$$

$$c = \frac{1 - \beta}{\omega T} (1 - a + b)$$

β est le coefficient d'atténuation à la pulsation ω *(=2πf).*

Si $\beta = 0{,}1$ le signal sera divisé par 10 à la fréquence f

Si $\beta = 0{,}0{,}5$ le signal sera divisé par 20 à la fréquence f

16 ANNEXE 2 : INTRODUCTION D'UN BIAIS AVEC KALMAN

On cherche à filtrer X avec un modèle en V.

A basse fréquence (en régime établi), s'il existe un biais sur V celui-ci va se répercuter sur X.

En effet, si le modèle est simplement en vitesse, et s'il existe un biais sur celle-ci, la prédiction vaut :

$$X_p = \tilde{X} + (V + \Delta V)\,T$$

L'équation de filtrage devient : $\tilde{X} = \propto X_m + (1-\propto)\,(\tilde{X} + (V + \Delta V)\,T)$

Le biais se calcule en régime permanent : $X_m = Cte = X_0$, donc $V = 0$

$$\tilde{X} = \propto X_0 + (1-\propto)\,(\tilde{X} + \Delta V\,T) \quad => \quad \tilde{X} = X_0 + \frac{(1-\propto)}{\propto}\,\Delta V\,T$$

La mesure filtrée est biaisée par rapport à X_0 d'une valeur $\boxed{\Delta X = \frac{(1-\propto)}{\propto}\,\Delta V\,T}$

Si on prend un mobile, arrêté, avec $\Delta V\,T = 0{,}1m/s \times 1s = 0{,}1m$

et si on prend par exemple $\propto = 0{,}1$, alors le biais est de $\frac{0.9}{0.1} \times 0{,}1 = 9\text{m}$

Alors que la mesure est 100% bonne à basse fréquence ! (car on n'a en général rien d'autre)

Et si le modèle était en accélération, ou si $\propto$ était plus petit, le biais serait encore plus grand.

Quand la valeur prédite est calculée à partir de l'intégrale de la vitesse, ou de l'intégrale double de l'accélération**, la valeur filtrée est biaisée**, alors que le capteur, lui, n'a pas de biais (ou il est inconnu). Il est vrai que l'on peut identifier ce biais par un intégrateur ou par une variable supplémentaire, mais l'identification du biais est lente pour ne pas rendre le processus instable.

17 ANNEXE 3 : CALCUL DES EQUATIONS DES FILTRES EXPERTS

17.1 FILTRE EXPERT DU 1E ORDRE AVEC COMPLEMENT EN X

Principe

Nous verrons que ce type de filtre est rarement utilisé dans l'état, car on fait souvent appel à des filtres plus élaborés que nous verrons par la suite, mais il est important de l'étudier pour comprendre le principe.

On veut filtrer un signal par un filtre passe-bas du 1 e ordre (sans apporter de retard).

Or ce type de filtre normal passe-bas du 1er ordre, apporte un retard :

$$\frac{\tilde{X}}{X_m} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}}$$

Avec : $b = e^{-\omega T} = e^{-2\pi f T}$

Nous allons rajouter un complément X_c (X complément) à partir d'une autre information (modèle, autre mesure, dérivée, intégrale, etc.), de telle façon que la somme fasse 1 à toutes les fréquences.

$$\tilde{X} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}} X_m + ?\; X_c$$

La somme doit faire 1, même en régime continu : $X_c = X_m = \tilde{X}$

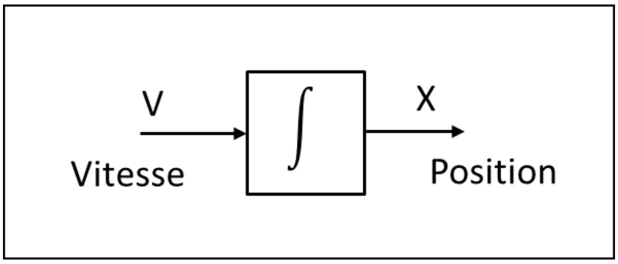
On voit qu'il faut rajouter :

$$\tilde{X} = \frac{1-b}{1-b\,z^{-1}}\, X_m + \frac{b(1-z^{-1})}{1-b\,z^{-1}}\, X_c$$

Soit : $\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$

17.2 FILTRE EXPERT DU 1E ORDRE AVEC COMPLEMENTATION EN V

Imagions maintenant que nous ne complémentions pas la mesure par une mesure équivalente, mais par une mesure correspondant à sa dérivée V.



Si nous reprenons la formule de récurrence du filtre précédent :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b(X_c - X_{c-1})}$$

Or $X_c - X_{c-1} = X_c\,(1 - z^{-1})$ qui représente $V\,T$, où V est la dérivée de X_c

On peut donc écrire :

$$\boxed{\tilde{X} = b\,\tilde{X}_{-1} + (1-b)\,X_m + b\,VT}$$

Mais attention, ce filtre n'enlève pas le biais sur V.

Pour cela, prendre un filtre d'ordre plus élevé.

17.3 FILTRE EXPERT DU 2E ORDRE AVEC ELIMINATION D'OFFSET SUR V

Cela va réduire l'ordre sur X_m, ce qui fait que l'on aura seulement un 1[er] ordre sur X_m.

Pour éliminer l'offset sur V (ou $X_c - X_{c-1}$), nous avons vu qu'il fallait utiliser un filtre du 2[ème] ordre.

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T} \cos\left(\omega T \sqrt{1-\xi^2}\right)$

et $b = e^{-2\xi\omega T}$

Pour que l'erreur constante sur V (ou $X_c - X_{c-1}$) s'annule, il faut que dans le deuxième membre, nous fassions apparaître $V_{-1} - V_{-2}$

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Ceci constitue donc un filtre du 1[er] ordre sur la mesure, complémenté par le complément en V et ceci sans offset puisque le modèle intervient en $V_{-1} - V_{-2}$.

Si ωT est $\ll 1$ alors les coefficients qui pondèrent les mesures brutes : X_m et X_{m-1} sont :

$A = 1 - b$ qui est voisin de $2\xi\omega T$

$B = 2b - a$ qui est voisin de $-2\xi\omega T$

Connaissant le coefficient d'atténuation que l'on veut sur la mesure (A et B), on peut en déduire une idée de ω et donc de la fréquence de coupure f a priori.

Mais une fois trouvé f les calculs de tous les coefficients doivent être refaits avec une très grande précision.

Ce filtre peut servir également à reconstituer $\tilde{X}$ à partir de γ mais avec risque de biais :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si pour un *f* donné, on veut des coefficients sur X_m et X_{m-1} plus petits que ωT il faut prendre un filtre du 3e ordre.

17.4 FILTRE EXPERT DU 3E ORDRE AVEC ELIMINATION D'OFFSET SUR V

(2e ordre sur X_m)

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Avec : $a = 2e^{-\xi\omega T}\cos\left(\omega T\sqrt{1-\xi^2}\right)$

$b = e^{-2\xi\omega T}$

$c = e^{-\omega T}$

Dans le 2ème terme, il apparait au numérateur du z^0, z^{-1}, z^{-2} et $z^{-3} * X_c$, donc du

V_{-1}, V_{-2} et V_{-3} puisque $X_c - X_{c-1} = V_{-1}T$

Si l'on veut éliminer l'offset sur V, il faut faire apparaître un terme en $(C+D)V_{-1}, -CV_{-2} - DV_{-3}$ de telle manière que, s'il existe un écart constant, celui-ci disparaisse.

On obtient :

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si ωT est $\ll 1$ alors les coefficients A et B qui pondèrent la mesure valent environ :

A = *2 à 3* $\omega^2 T^2$

B = *-2 à -3* $\omega^2 T^2$ selon la valeur de ξ

On voit que les coefficients A et B qui pondèrent la mesure (X_m et X_{m-1}) sont très faibles, ce qui va nous permettre d'avoir des mesures filtrées avec un bruit résiduel très faible et sans retard, ce qui va nous permettre de commander par exemple des automatismes avec des gains puissants.

En fonction du coefficient d'atténuation que l'on souhaite, on a alors une idée de ω.
Il faut refaire alors précisément tous les calculs de A, B, C et D, en fonction de ω.

ATTENTION A LA PRECISION DES CALCULS : toutes ces valeurs sont très faibles et sont soustraites entre elles. Toute approximation entraîne des résultats erronés.

17.5 FILTRE EXPERT DU 3E ORDRE AVEC ELIMINATION D'OFFSET SUR g

(1e ordre sur X_m)

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si ωT est $\ll$ 1 alors les coefficients A, B *et* C qui pondèrent la mesure valent environ :

A et C= 2 à 3ωT

et *B = -4 à -6ωT* selon la valeur de ξ

NB : En fait l'accélération mesurée sur le processus, peut ne pas être instantanée, et il peut être préférable d'écrire $\gamma_{-2} - \gamma_{-3}$

17.6 FILTRE EXPERT DU 4E ORDRE AVEC ELIMINATION D'OFFSET SUR V

(3ème ordre sur X_m)

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Note : $X_c = \tilde{X}_{-1} + V_{-1}T$ ressemble au X prédit du filtrage de Kalman, mais c'est une coïncidence pour une simplification d'écriture. Dans le filtrage expert, on n'utilise pas le X prédit, car si le modèle est faux, ou s'il y a un biais, la prédiction est fausse, et donc le résultat du filtrage est faux.

Les coefficients sur X_m et X_{m-1} sont de l'ordre de *3 à 4* ω^3T^3 et *-3 à -4* ω^3T^3 suivant ξ

17.7 FILTRE EXPERT DU 4E ORDRE AVEC ELIMINATION D'OFFSET SUR g

(2ème ordre sur X_m)

Texte disponible uniquement dans la version complète.

Si $\omega T \ll 1$ les coefficients sur X_m et X_{m-1} valent environ :

A et C= $4 \text{ à } 6\omega^2T^2$

$B = -8 \text{ à } -12\omega^2T^2$ selon la valeur de ξ

On en déduit une valeur de $\omega^{\square}T^{\square}$, en fonction de l'atténuation que l'on souhaite sur les mesures, puis on refait tous les calculs une fois ωT défini.